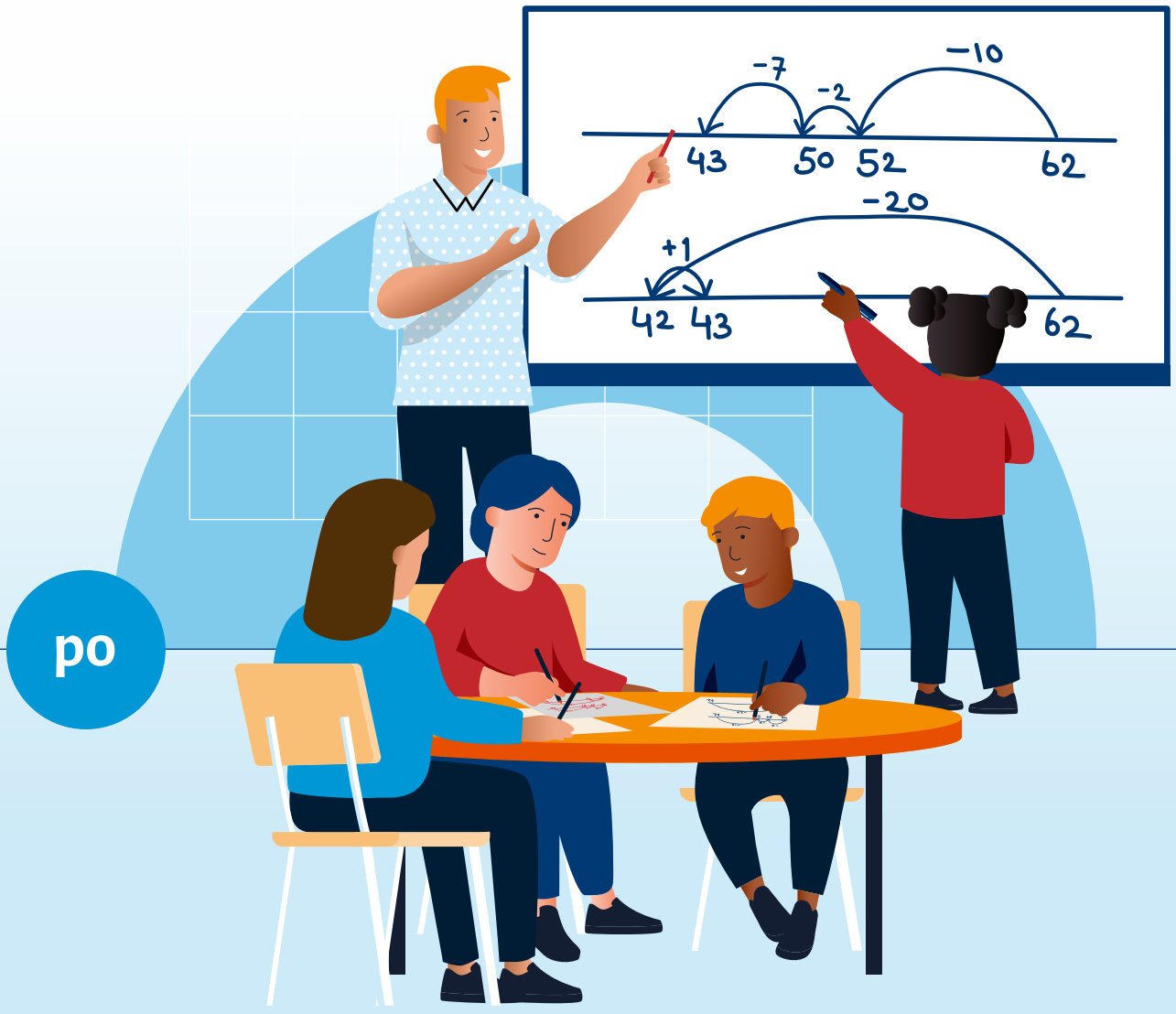
NATIONAAL
KENNISINSTITUUT
ONDERWIJS

Leidraad

Betekenisvol en doelgericht reken-wiskundeonderwijs in groep 3-8

Effectieve aanpakken in het **reken-wiskundeonderwijs**
Weten wat werkt en waarom



po

Leidraad

Betekenisvol en doelgericht reken-wiskundeonderwijs in groep 3-8

Effectieve aanpakken in het **reken-wiskundeonderwijs**
Weten wat werkt en waarom

Marian Hickendorff
Marjolein Kool
Michiel Veldhuis
Rosalie Rouwendaal
Mascha Haverkamp

Colofon

Leidraadcommissie

Auteurs
Marian Hickendorff – universitair hoofddocent onderwijswetenschappen, Universiteit Leiden
Marjolein Kool – hogeschoolhoofddocent rekenen-wiskunde en didactiek, Hogeschool Utrecht

Met medewerking van
Michiel Veldhuis – docent-onderzoeker rekenen-wiskunde, Hogeschool IPABO, Amsterdam
Rosalie Rouwendaal – schoolleider, De Vrijheit, Wijk aan Zee
Mascha Haverkamp – leerkracht en rekencoördinator, Kindcentrum Willem Eggert, Purmerend

Kwaliteitscommissie

Nelleke Brouwer – directeur OBS Overvecht, Utrecht
Tom Drukker – docent maatschappijleer en adviseur onderwijs en onderzoek, Openbaar Onderwijs Groningen
Debbie Dussel – leerkracht, SBO de Watertuin, Almere
Harrie Eijkelhof – emeritus hoogleraar natuurkundedidactiek, Universiteit Utrecht
Guuske Ledoux – voormalig wetenschappelijk directeur Kohnstamm Instituut, Amsterdam
Amber Walraven – universitair docent, Radboud Docenten Academie, Nijmegen

Wetenschappelijke reviewer

Lieven Verschaffel – emeritus hoogleraar onderwijswetenschappen, KU Leuven

Eindredactie Nationaal Kennisinstituut Onderwijs: Koosje Heurter
Grafisch Ontwerp: Ontwerpwerk
Illustraties: Ontwerpwerk
Medewerkers Nationaal Kennisinstituut Onderwijs: Madelon Anholts en Anne Luc van der Vegt

Verwijzen naar deze leidraad
Hickendorff, M., & Kool, M. (2026). Leidraad betekenisvol en doelgericht reken-wiskunde-onderwijs in groep 3-8. Nationaal Kennisinstituut Onderwijs. *https:// www.onderwijskennis.nl/node/7194*

www.onderwijskennis.nl/contact

Januari 2026

www.onderwijskennis.nl/leidraad/rekenen-wiskunde-3-8

Deze leidraad is tot stand gekomen met financiering uit het programma Ontwikkelkracht.

NATIONAAL KENNISINSTITUUT ONDERWIJS

ontwikkelkracht

Inhoud

Voorwoord 5

Aanbevelingen in het kort 6

Inleiding 9

Aanbeveling 1 **Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen** **12**

Aanbeveling 2 **Schakel tussen concreet, schematisch en abstract** **18**

Aanbeveling 3 **Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel** **24**

Aanbeveling 4 **Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen** **31**

Aanbeveling 5 **Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude** **39**

Aanbeveling 6 **Investeer als school in reken-wiskunde-onderwijs** **46**

Referenties 50

Het Nationaal Kennisinstituut Onderwijs ontwikkelt leidraden voor alle onderwijssectoren, over diverse onderwerpen.
Ga naar *www.onderwijskennis.nl/leidraden* voor extra materialen en andere leidraden.

NATIONAAL
KENNISINSTITUUT
ONDERWIJS
Onderwijskennis

Voorwoord

De leidraad *Betekenisvol en doelgericht reken-wiskunde-onderwijs in groep 3-8* is gemaakt voor leerkrachten, schoolleiders, intern begeleiders en andere onderwijsprofessionals die hun reken-wiskundeonderwijs willen versterken. Met deze leidraad willen we onderwijsonderzoek verbinden met de onderwijspraktijk in de school en in de klas.

In onze leidraden presenteren we verzamelde kennis uit onderzoek op een praktische en toegankelijke manier. De leidraden gaan over onderwerpen waarvan leerkrachten en schoolleiders hebben aangegeven dat ze belangrijk zijn bij de vormgeving van het beste onderwijs. Het zijn onderwerpen waarover ze meer kennis willen opdoen en waarop zij meer grip willen krijgen.

Een van de belangrijkste ambities van het onderwijs in Nederland is zorgen dat iedere leerling over voldoende reken-wiskundige kennis en vaardigheden beschikt. Dit is essentieel om te kunnen functioneren in de maatschappij. Het helpt kinderen om grip te krijgen op de wereld, situaties te begrijpen en dagelijkse problemen op te lossen. De boodschap van deze leidraad is helder: voor goede reken-wiskundige kennis en vaardigheden hebben leerlingen betekenisvol en doelgericht onderwijs nodig. Zo bereidt het reken-wiskundeonderwijs hen voor op het vervolgonderwijs én op de wereld om zich heen.

We willen met de leidraad de lezer aan het denken zetten en helpen om passende keuzes te maken. De leidraad is niet bedoeld als handboek waarin stap voor stap staat beschreven hoe je als leerkracht, schoolleider, intern begeleider of andere onderwijsprofessional te werk moet gaan. Er is niet één recept dat onder alle omstandigheden van toepassing is. Verschillende situaties vragen om verschillende werkwijzen.

We hopen dat de leidraad leidt tot reflectie, tot professionele gesprekken binnen schoolteams en tot het maken van passende keuzes in de vormgeving van het onderwijs. Ook hopen we dat de leidraad zorgt voor samenwerking tussen leerkrachten en scholen om zo de kwaliteit van het onderwijs te verhogen.

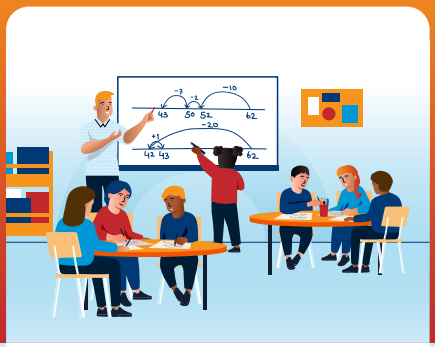
Onze leidraden zijn geschreven door commissies die bestaan uit leerkrachten, schoolleiders, lerarenopleiders en wetenschappers. Elke leidraad is gebaseerd op het meest recente wetenschappelijk onderzoek. Een kwaliteitscommissie leest mee om zowel de relevantie en toegankelijkheid voor scholen, als de wetenschappelijke kwaliteit te waarborgen.

Tot slot, ga voor onze andere leidraden en kennisproducten naar de website *www.onderwijskennis.nl*.

Gerard Baars
directeur Nationaal Kennisinstituut Onderwijs

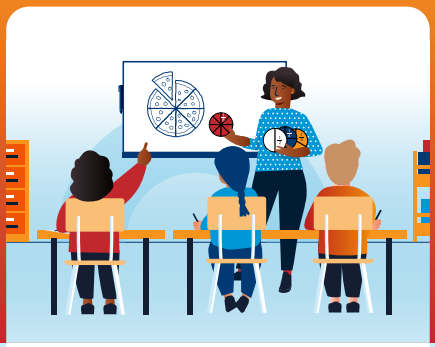
po

Betekenisvol en doelgericht reken-wiskundeonderwijs in groep 3-8



Aanbeveling 1
Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen

- Zorg voor een stevige basis van getalbegrip, geautomatiseerde vaardigheden en parate kennis. Leer leerlingen procedures uitvoeren én begrijpen.
- Maak de inhoudelijke samenhang tussen rekenfeiten, procedures, concepten en situaties zichtbaar en inzichtelijk.
- Stimuleer dat leerlingen hun denk- en rekenwerk verwoorden en noteren, met aandacht voor reken-wiskundetaal.
- Laat leerlingen verschillende oplossingsmanieren bespreken en vergelijken. Leer leerlingen doordacht en onderbouwd kiezen voor een bepaalde aanpak.
- Laat leerlingen relaties leggen tussen gehele getallen, decimale getallen, breuken, verhoudingen en procenten.
- Geef meten en meetkunde een stevige plek in het netwerk.



Aanbeveling 2
Schakel tussen concreet, schematisch en abstract

- Gebruik concrete materialen, herkenbare situaties, schema's en modellen, ook in de bovenbouw. Kies materialen, situaties en modellen met een duidelijke reken-wiskundige structuur, die past bij de te leren concepten en procedures.
- Help leerlingen de verbinding te leggen tussen concreet, schematisch en abstract.
- Zorg dat leerlingen tot abstracties komen door materiaalgebruik af te bouwen. Voorkom dat leerlingen blijven vasthouden aan concrete materialen.
- Neem in je onderzoek van de ontwikkeling van leerlingen de verschillende niveaus van concreet tot abstract mee. Pas je instructie en begeleiding hierop aan.
- Zorg voor concrete ervaringen bij meten en meetkunde.

Aanbeveling 3
Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel

- Zorg dat je de doelen en leerlijnen van rekenen-wiskunde kent en werk doelgericht. Deel en evalueer de doelen met de leerlingen.
- Stel geregeld vast wat leerlingen kennen, kunnen en denken. Doe dit op verschillende manieren.
- Sluit aan bij de ontwikkeling en onderwijsbehoeften van álle leerlingen. Activeer voorkennis, differentieer als dat nodig is, kies passende instructievormen en opdrachten, en zet digitale middelen doordacht in. Geef feedback die het leerproces verder brengt.
- Help leerlingen na te denken over veelvoorkomende fouten en misconcepties.
- Ondersteun leerlingen die het nodig hebben met gestructureerde interventies. Bied leerlingen die het aankunnen uitdagende en verdiepende activiteiten met instructie en begeleiding.

Hoe zorg je als leerkracht voor betekenisvol, doelgericht en samenhangend reken-wiskunde-onderwijs waarin leerlingen kennis, vaardigheid en begrip ontwikkelen, en dat hun motivatie, zelfvertrouwen en wiskundige attitude bevordert? Deze aanbevelingen bieden je inspiratie en ondersteuning.

Aanbeveling 4
Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen

- Bied álle leerlingen alle soorten opgaven aan, inclusief reken-wiskundige problemen waarvoor ze geen kant-en-klare aanpak paraat hebben.
- Ondersteun en stimuleer leerlingen in alle fasen van probleemoplossen: betekenis geven, uitvoeren en reflecteren. Neem denkwerk en moeilijkheden niet te snel weg.
- Begeleid leerlingen als ze samen verschillende aanpakken vergelijken, verwoorden, verdedigen en bespreken.
- Laat leerlingen ervaring opdoen met algemene aanpakken om reken-wiskundige problemen op te lossen. Leer leerlingen schematische tekeningen maken.
- Zorg voor een doordachte voorbereiding. Bedenk van tevoren welke correcte én foute oplossingsmanieren leerlingen mogelijk gebruiken, en hoe je daarop kunt inspelen.

Aanbeveling 5
Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude

- Maak leerlingen enthousiast voor rekenen-wiskunde en stimuleer hun motivatie en betrokkenheid. Maak rekenen-wiskunde relevant en betekenisvol, activeer leerlingen en laat ze overleggen en samenwerken.
- Stimuleer zelfvertrouwen en voorkom rekenangst. Positieve ervaringen zijn cruciaal.
- Begeleid leerlingen bij de ontwikkeling van metacognitieve vaardigheden: plannen, monitoren en evalueren van hun denken en handelen.
- Leer leerlingen rekenen-wiskunde in de werkelijkheid te herkennen en gebruiken. Stimuleer een onderzoekende en kritische houding.
- Wees je bewust van je voorbeeldfunctie als leerkracht. Toon enthousiasme en een wiskundige attitude.

Aanbeveling 6
Investeer als school in reken-wiskunde-onderwijs

- Werk als school voortdurend en doelgericht aan de kwaliteit van het reken-wiskunde-onderwijs. Maak dit een gedeelde verantwoordelijkheid van leerkrachten, ondersteuners en schoolleiding.
- Faciliteer en stimuleer als schoolleiding dat leerkrachten zich professionaliseren in reken-wiskundeonderwijs.
- Geef een rekencoördinator voldoende tijd en mogelijkheden om het team te ondersteunen.
- Realiseer een schoolcultuur van hoge verwachtingen.

Download of bestel de poster met aanbevelingen gratis op *www.onderwijskennis.nl/leidraad/rekenen-wiskunde-3-8*

Meer weten: *www.onderwijskennis.nl/leidraad/rekenen-wiskunde-3-8*

NATIONAAL KENNISINSTITUUT ONDERWIJS

Tekstkaders

In de gekleurde tekstkaders staat extra informatie. De blauwe kaders bieden meer wetenschappelijke achtergronden, de informatie in de rode en gele kaders is praktischer van aard.

Verdiepende informatie

Wat is bekend uit onderzoek?

Praktijkvoorbeeld

Zelf aan de slag

Inleiding

Rekenen-wiskunde is essentieel om mee te kunnen doen in de samenleving. Het krijgt dan ook terecht veel aandacht in het basisonderwijs. Hoe kun je de onderwijstijd voor rekenen-wiskunde in groep 3 tot en met 8 het best benutten? Daar is veel en gevarieerd wetenschappelijk onderzoek naar gedaan in binnen- en buitenland. Deze leidraad brengt de belangrijkste uitkomsten samen en maakt ze in zes aanbevelingen toegankelijk en bruikbaar voor de onderwijspraktijk.

Rekenen-wiskunde helpt kinderen om grip te krijgen op de wereld om hen heen, situaties te interpreteren en problemen op te lossen in het dagelijkse leven. Reken-wiskundeonderwijs bereidt leerlingen voor op de wereld en op het vervolgonderwijs. Het begint bij de kleuters, die op speelse wijze kennismaken met getallen, tellen, maten, vormen en structuren.[1] Vanaf groep 3 bouwen leerlingen op deze basis voort en breiden ze hun kennis en vaardigheden uit. Rekenen-wiskunde is dan nog steeds gebaseerd op concrete materialen en herkenbare situaties, maar wordt gaandeweg complexer en abstracter. Ook in de bovenbouw blijven materialen en situaties belangrijk, om rekenen-wiskunde te begrijpen en er betekenis aan te geven.

Het reken-wiskundeonderwijs in groep 3-8 werkt toe naar de kerndoelen en referentieniveaus voor het Nederlandse basisonderwijs.[2,3] De aanbevelingen in deze leidraad zijn gericht op de ontwikkeling van kennis, vaardigheden, inzicht en attitude zoals die in de kerndoelen staan. Daarvoor is betekenisvol en doelgericht reken-wiskundeonderwijs in groep 3-8 nodig. Onderwijs dat schakelt tussen concreet en abstract en tussen begripsvorming én procedures, en dat motivatie en plezier in rekenen bevordert.

De leerkracht maakt het verschil

Er is niet één juiste of beste methode om leerlingen te leren rekenen.[4,5,6] Wel is bekend dat de leerkracht het verschil maakt. Het gaat erom hoe je als leerkracht je kennis en ervaring gebruikt om met een rijk repertoire aan technieken aan te sluiten bij het denken en redeneren van je leerlingen en hun onderwijsbehoeften. Het gaat bijvoorbeeld om voorbeelden geven, diagnosticerende en verdiepende vragen stellen, concrete materialen inzetten, feedback geven en hints of expliciete uitleg geven zonder het denkwerk bij de leerlingen weg te nemen. En het gaat om verbindingen leggen, misconcepties herkennen en daar adequaat mee omgaan, en passende reken-wiskundige representaties gebruiken.[7,8] Om doelgericht en effectief reken-wiskundeonderwijs te verzorgen, heb je kennis nodig van de vakinhoud, doelen, leerlijnen en het leerproces van leerlingen. Je vakinhoudelijke en vakdidactische kennis, en hoe je deze weet in te zetten in je onderwijs, zijn belangrijker dan de keuze voor specifieke reken-wiskundemethodes of digitale hulpmiddelen.[9,10]

Deze leidraad is primair bedoeld voor leerkrachten, die het reken-wiskundeonderwijs in de klas vormgeven. Maar de leidraad is relevant voor álle betrokkenen bij het reken-wiskundeonderwijs, zoals rekencoördinatoren of -specialisten, intern begeleiders, onderwijsadviseurs, directeuren en lerarenopleiders.

Vaktermen

In Nederland worden verschillende benamingen naast en door elkaar gebruikt: rekenen, wiskunde, rekenen-wiskunde, rekenen en wiskunde ... In deze leidraad is gekozen voor de meest gangbare term in de Nederlandse reken-wiskundemethodes: rekenen-wiskunde. Soms, als het bij een onderwerp passender is, staat er enkel 'rekenen' of 'wiskunde', zoals bij 'wiskundig probleemoplossen' of 'rekenfeiten'.

Aanbevelingen om het reken-wiskundeonderwijs sterker te maken

De basis van het reken-wiskundeonderwijs is op veel scholen in Nederland op orde.[11] Leerlingen krijgen doorgaans heldere instructie en oefenen met geschikte opgaven. Leerlingen die rekenen-wiskunde lastig vinden krijgen extra ondersteuning en begeleiding. Veel leerlingen bereiken het gewenste basisniveau. Er is ruimte voor verbetering om het beste uit álle leerlingen te halen, door hen uit te dagen, te stimuleren en aan te zetten tot redeneren en probleemoplossen.

De leidraad is vooral bedoeld om vanuit de aanwezige goede basis verder te komen. De zes aanbevelingen vormen een rijke bron om jou als leerkracht te steunen en te inspireren. Gebruik de leidraad om ideeën op te doen. Neem samen met collega's en de rekencoördinator het reken-wiskundeonderwijs in jouw school onder de loep en maak plannen voor een volgende ontwikkelstap. Zo kun je geleidelijk toegroeien naar (nog) beter reken-wiskundeonderwijs.

Algemene en wetenschappelijk onderbouwde aanbevelingen

De aanbevelingen zijn niet ingedeeld volgens de reken-wiskundige leerinhouden. Ze beschrijven geen tussendoelen, leerlijnen of handreikingen per onderwerp. Het zijn generieke aanbevelingen die altijd waardevol zijn bij het geven van reken-wiskundeonderwijs, ongeacht het onderwerp, de leeftijd of het talent van de leerlingen, de gebruikte reken-wiskundemethode of de vakdidactische visie van de leerkracht. Voorbeelden uit de praktijk, die je onder andere leest in kaders, maken de aanbevelingen concreet.

De aanbevelingen in deze leidraad zijn gebaseerd op internationaal en nationaal wetenschappelijk onderzoek. Er is zo veel mogelijk gebruikgemaakt van reviewstudies, meta-analyses en (quasi)experimenteel onderzoek. Ook zijn twee sets van aanbevelingen gebruikt die beide op onderzoeksresultaten zijn gebaseerd: een *guidance report* van de *Education Endowment Foundation* (EEF) uit Engeland[12] en *Principles to Action* van de *National Council of Teachers of Mathematics* uit de Verenigde Staten.[13] Daarnaast zijn er soms ook theoretische of juist praktische bronnen aangehaald, zonder onderzoeksresultaten. De wetenschappelijke bewijskracht van de bronnen varieert dus. Vanwege de leesbaarheid is hier in de tekst niet systematisch op ingegaan. Via de referentielijst kun je hier meer zicht op krijgen.

De aanbevelingen

In deze leidraad staan zes aanbevelingen voor betekenisvol en doelgericht reken-wiskundeonderwijs in groep 3-8:

1. Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen.
2. Schakel tussen concreet, schematisch en abstract.
3. Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel.
4. Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen.
5. Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude.
6. Investeer als school in reken-wiskundeonderwijs.

Doelen voor rekenen en wiskunde

De wettelijke doelen voor primair onderwijs bestaan uit kerndoelen en referentieniveaus. In de periode 2022-2025 zijn de kerndoelen geactualiseerd.[14] De nieuwe kerndoelen voor rekenen en wiskunde omvatten drie domeinen:

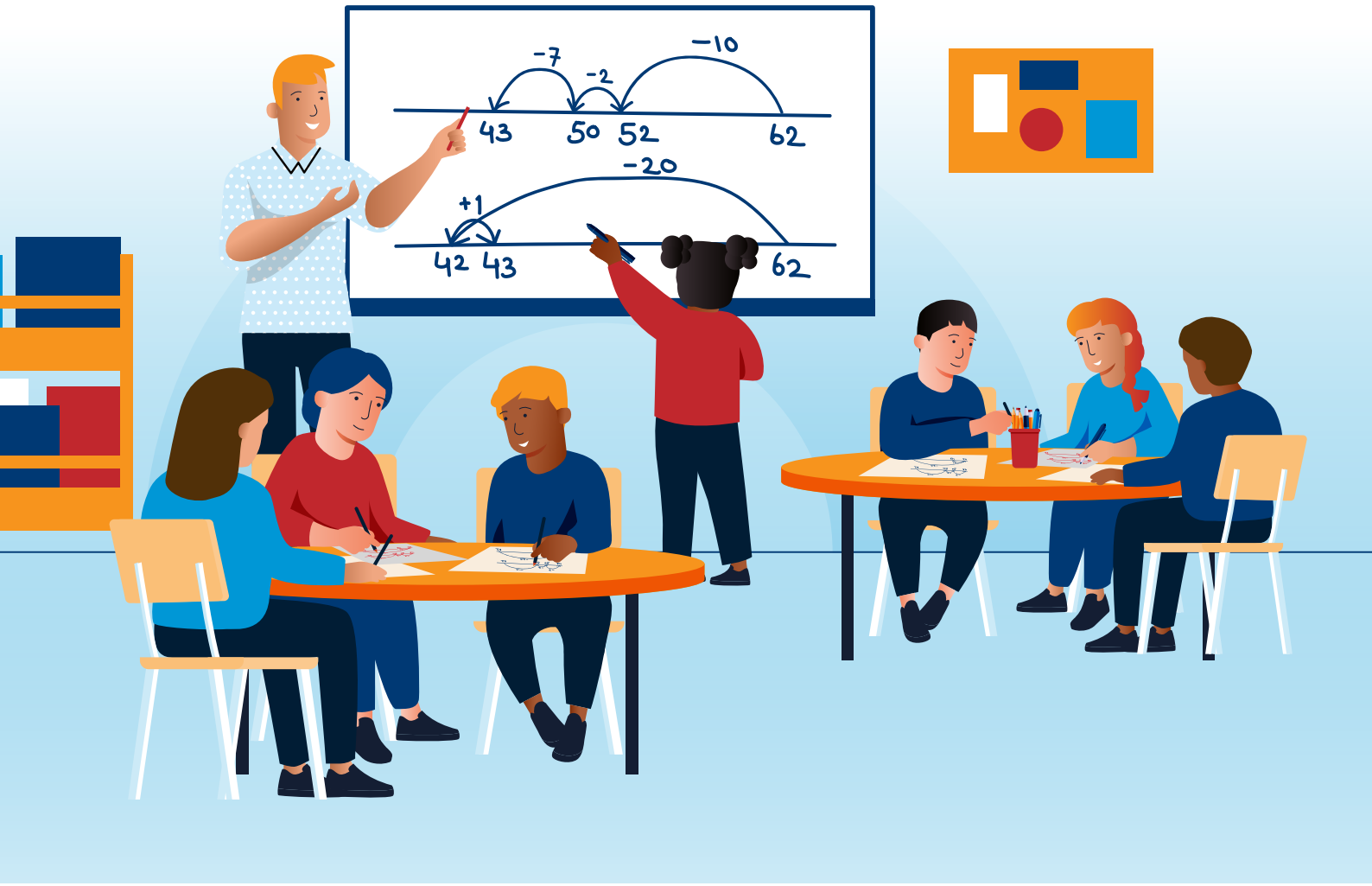
Wiskundige concepten met doelen voor gehele en decimale getallen, breuken, verhoudingen, grootheden en eenheden, data, patronen en verbanden, en meetkunde.

Wiskundige denk-werkwijzen met doelen voor wiskundig probleemoplossen, wiskundig modelleren, gebruiken en beschrijven van algoritmes, gebruiken van wiskundetaal en wiskundige representaties, en gebruiken van wiskundige instrumenten.

Wiskunde en de wereld met doelen voor wiskundige attitude, wiskunde in de werkelijkheid, en wiskunde in verschillende leergebieden.

Naast de kerndoelen gelden voor primair onderwijs referentieniveaus voor taal en rekenen.[15] Deze bestaan uit beheersingsdoelen voor getallen, verhoudingen, meten en meetkunde, en verbanden.

Voor de laatste stand van zaken met betrekking tot de referentieniveaus en de invoering van de nieuwe kerndoelen, zie *https://www.slo.nl/thema/meer/taal-rekenen/*.



1. **Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen.**
2. Schakel tussen concreet, schematisch en abstract.
3. Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel.
4. Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen.
5. Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude.
6. Investeer als school in reken-wiskundeonderwijs.

1 Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen

Een belangrijk kenmerk van rekenen-wiskunde is de grote samenhang. Het is een netwerk van concepten, procedures, parate kennis, vermoedens, ideeën, inzichten en concrete ervaringen, situaties uit de wiskunde en de werkelijkheid. Via allerlei dwarsverbanden zijn deze met elkaar verbonden. Tijdens het leerproces groeit het netwerk, verandert het van vorm en beïnvloeden onderdelen elkaar voortdurend. Oefenen maakt het netwerk stevig, inzicht houdt het netwerk flexibel. Zonder aandacht voor dwarsverbanden valt het bouwwerk van rekenen-wiskunde als los zand uit elkaar.

1.1 Zorg voor een stevige basis, met aandacht voor begrip

Als leerkracht kun je leerlingen op elk moment in de reken-wiskundeles stimuleren om expliciet verbindingen te leggen. Voorkennis activeren is bijvoorbeeld al een uitnodiging aan de leerlingen om nieuwe met bestaande kennis te verbinden. Voor een rijk netwerk is een stevige basis nodig.

Getalbegrip, geautomatiseerde vaardigheden en parate kennis

Een stevige basis bevat onder andere een goed ontwikkeld getalbegrip. Dat begint al bij de kleuters.[16] Ze leren tellen, omgaan met hoeveelheden en getallen gebruiken. Vanaf groep 3 breidt het netwerk zich uit, met grotere gehele getallen en later met decimale getallen en breuken. Getalbegrip ontwikkelt zich cumulatief: als je rekenen tot 20 beheerst, kun je dezelfde principes toepassen op rekenen tot 100, 1000 en verder.[17] Concrete materialen en modellen zoals de getallenlijn helpen om getalbegrip te ontwikkelen.

Leerlingen moeten daarnaast op een gegeven moment bepaalde dingen uit hun hoofd weten (gememoriseerd hebben), zoals optellen en aftrekken tot 20 en de tafels. Bepaalde basisbewerkingen, zoals rekenen tot 100, moeten geautomatiseerd zijn. Automatiseren betekent dat leerlingen rekenhandelingen via enkele 'ingesleten' stappen vrijwel routinematig uitvoeren.[18] Door automatiseren en memoriseren blijft een groter deel van het werkgeheugen beschikbaar voor complexere berekeningen.

Oefenen is cruciaal voor automatiseren en memoriseren.[19] Het is belangrijk om daarbij voort te bouwen op het getalbegrip van leerlingen, en niet zonder aandacht voor begrip te 'stampen'.[20] Zorg dat leerlingen voor, tijdens en na het oefenen verbindingen leggen tussen getallen en procedures, waardoor de geoefende kennis en vaardigheden bruikbaarder worden.[21,22,23] Dat kan bijvoorbeeld door oefenopgaven aan te bieden in een volgorde die leerlingen helpt om verbanden te zien, zoals 3 + 6 gevolgd door 6 + 3, of 23 + 30 gevolgd door 23 + 29.[24] Je kunt leerlingen ook vragen om opgaven die in een willekeurige volgorde staan te ordenen en hun ordening uit te leggen. Zorg dat leerlingen de strategieën die ze automatiseren goed begrijpen, want dan kunnen ze deze kennis flexibel toepassen bij andere opgaven.[25] Dat vormt ook een goede voorbereiding op de geavanceerde wiskundetaken in het voortgezet onderwijs.[26]

Het is aan te raden om elke dag minstens tien minuten te besteden aan rekenautomatisering,[27,28] ook in de bovenbouw. Het is effectiever om oefenmomenten te spreiden over de dag: liever twee keer vijf minuten dan één keer tien minuten.[29,30] Zet verschillende soorten oefenvormen in. Reproductieve (op herhaling gerichte) oefenvormen, zoals rijtjesopgaven, zijn geschikt om het pas geleerde in te slijpen. Productieve oefenvormen combineren oefenen met puzzelen (zie figuur 1 op pagina 14). Dit soort oefenvormen vraagt meer denkwerk, ontlokt meer eigen inbreng van leerlingen en biedt meer mogelijkheden tot reflectie.[31,32] Daardoor dragen ze bij aan begrip. Het kader *Hoofdrekenen met de 24-game* hieronder geeft een voorbeeld van een productieve oefenvorm.

Hoofdrekenen met de 24-game

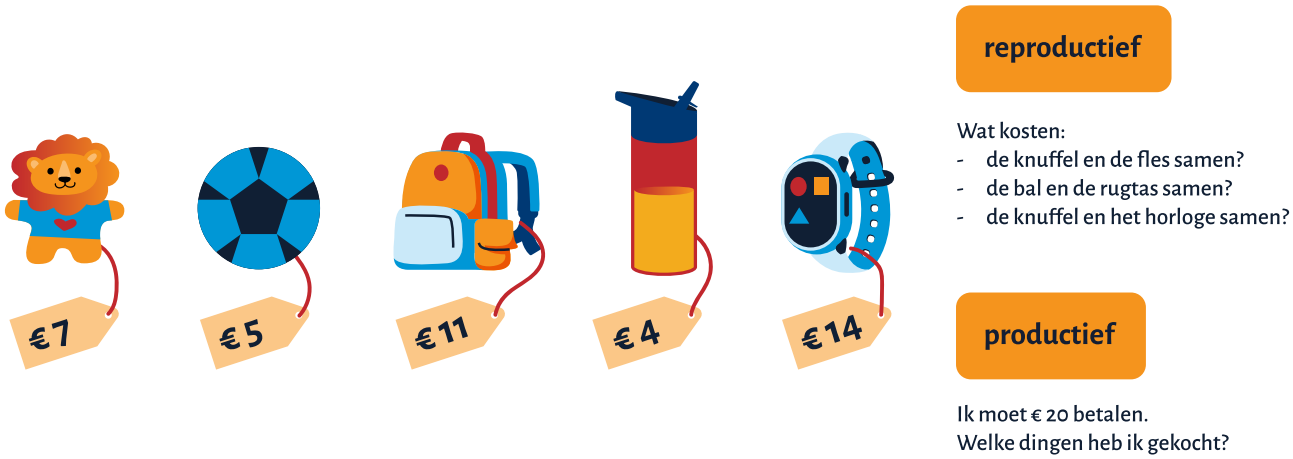
Met name in groep 6, 7 en 8 is de 24-game populair. Dit oefenspel heeft kaarten in verschillende moeilijkheidsniveaus. Op elke kaart staan vier cijfers die je allemaal moet gebruiken om door middel van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en/of delen op 24 uit te komen. Het spel laat leerlingen oefenen en nadenken over de effecten van de bewerkingen en hoe je die weer ongedaan kunt maken. Ook het verwoorden van oplossingsmanieren aan klasgenoten is leerzaam.

Uitvoeren en begrijpen van procedures

Een procedure is een reeks stappen om een berekening uit te voeren. Denk aan rijgen, splitsen en cijferen bij optel- en aftrekopgaven. Besteed bij het aanleren van procedures aandacht aan zowel begrip als vaardigheid, want beide zijn belangrijk, zoals hieronder wordt toegelicht in het kader *Vaardigheid en begrip*.[33] Zorg dat leerlingen de procedures vlot kunnen uitvoeren én dat ze kunnen uitleggen hoe en waarom ze werken. Dat maakt dat leerlingen hun procedures vaardig en flexibel kunnen toepassen.[34] Deze elementen komen ook terug in het hoofdlijnenmodel,[35] dat vier fasen onderscheidt: begripsvorming, ontwikkelen van oplossingsprocedures, vlot leren rekenen en flexibel toepassen.

Laat leerlingen regelmatig aan elkaar en aan zichzelf uitleggen hoe, waarom en wanneer een procedure werkt.[36] Waarom geldt: 237 + 198 = 237 + 200 - 2? Laat leerlingen ook uitleggen waarom een foutieve procedure onjuist is: waarom is 237 - 198 niet hetzelfde als 237 - 200 - 2?

Figuur 1. Voorbeeld van reproductief en productief rekenen.



Vaardigheid en begrip

Rekenen-wiskunde gaat om vaardigheid en begrip, ook wel procedurele en conceptuele kennis genoemd. Omdat er veel discussie is over het belang van beide soorten kennis en hoe ze elkaar beïnvloeden, verzamelden onderzoekers resultaten van relevante studies.[37] Ze onderscheiden twee soorten onderzoek.

In het eerste type onderzoek worden leerlingen een bepaalde tijd gevolgd. Verschillende studies laten zien dat de twee soorten kennis elkaar beïnvloeden: leerlingen met een hoger startniveau van begrip groeien meer in de uitvoering van procedures, terwijl leerlingen met een hoger startniveau van procedurele kennis meer begrip ontwikkelen. Beide soorten kennis dragen bij aan flexibel en handig rekenen.[38]

Het tweede type onderzoek heeft een experimentele opzet, waarbij een training of interventie minstens één soort kennis beïnvloedt. Leerlingen kregen bijvoorbeeld rekenopgaven die ze moesten oefenen.[39] Een deel van de leerlingen kreeg deze opgaven in willekeurige volgorde, een ander deel in een volgorde die begripsvorming stimuleert, zoals 3 + 6 en daarna meteen 6 + 3. De eerste groep ging enkel vooruit in procedurele kennis, maar de tweede ook in conceptuele kennis. Procedures oefenen kan dus bijdragen aan begripsvorming.

Er is dus sprake van tweerichtingsverkeer: conceptuele en procedurele kennis versterken elkaar.[40] Daarom is het goed om in je reken-wiskundeonderwijs af te wisselen tussen begripsontwikkeling en oefenen.

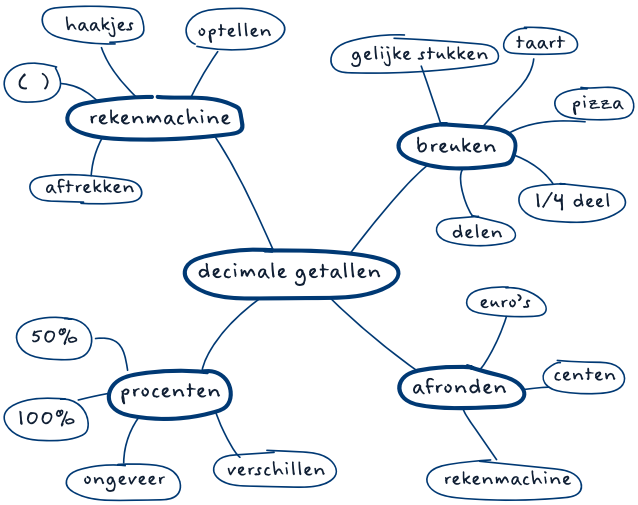
1.2 Maak de inhoudelijke samenhang tussen rekenfeiten, procedures, concepten en situaties zichtbaar en inzichtelijk

Laat leerlingen samenhang ontdekken en onder woorden brengen. Wat zijn overeenkomsten en verschillen tussen de aftrekprocedures rijgen en aanvullen? Welke heeft je voorkeur, wanneer en waarom? Wat heeft een rechthoekmodel met vermenigvuldigen te maken? Het kader *Hoe bouw je aan een rijk reken-wiskundig netwerk?*, zie pagina 17, geeft voorbeelden van hoe je leerlingen kunt stimuleren verbindingen te leggen.

Zorg dat leerlingen de verbindingen bewust leggen. Zo ontwikkelen ze het besef dat rekenen-wiskunde een netwerk vormt met vele dwarsverbanden, en dus niet een verzameling van losse rekenfeitjes en procedures is.[41,42] Dit kun je bijvoorbeeld doen door:

- leerlingen regelmatig een *concept-map* te laten maken van alles wat ze weten over een bepaald wiskundig onderwerp en de samenhang tussen die onderdelen.[43] Zie bijvoorbeeld de concept-map van breuken, decimale getallen en procenten in figuur 2.
- verbindingen zichtbaar te maken via visuele representaties (tekeningen, modellen en schema's).[44] Visuele representaties kunnen bovendien leerlingen die moeite hebben met rekenen-wiskunde ondersteunen bij klassikale rekengesprekken.

Figuur 2. Concept-map van breuken, decimale getallen en procenten.



1.3 Stimuleer dat leerlingen hun denk- en rekenwerk verwoorden en noteren

Om verbanden te leggen is het belangrijk dat leerlingen hun denk- en rekenwerk leren verwoorden. Dit kan in klassikale gesprekken onder begeleiding van de leerkracht.[45] In die gesprekken leren leerlingen dat het bij rekenen-wiskunde niet alleen om het goede antwoord gaat: de weg ernaartoe is minstens zo belangrijk.
Laat leerlingen hun denkstappen en oplossingsmanieren niet alleen verwoorden maar ook noteren, ook bij een digitale reken-wiskundemethode. Laat hen ervaren dat gedetailleerd en overzichtelijk opschrijven helpt om denkstappen te ordenen en terug te halen. Hulpnotities ontlasten bovendien het werkgeheugen.[46,47] Toon waardering voor informele, zelfbedachte notaties van leerlingen, hoe onbeholpen die misschien ook zijn. Ook visuele representaties, zoals schematische tekeningen en modellen, horen daarbij. Elke poging van een leerling om iets van het eigen denken zichtbaar te maken, geeft een aanknopingspunt om daarbij aan te sluiten.

Om te kunnen redeneren en communiceren over rekenen-wiskunde hebben leerlingen passende reken-wiskundetaal en een uitgebreide reken-wiskundige woordenschat nodig. Reken-wiskundig taalgebruik (van de leerling en van de leerkracht) en rekenprestaties hangen positief samen.[48] Bovendien blijkt dat reken-wiskundetaal van leerlingen bijdraagt aan hun reken-wiskundeontwikkeling, bovenop de rol die algemene taalvaardigheid daarbij speelt.[49] Door aandacht te besteden aan reken-wiskundetaal ontwikkelen leerlingen een beter begrip van concepten en procedures.[50] Zorg daarom voor eenduidige reken-wiskundetaal in de hele school. Als de ene leerkracht spreekt over 'kommagetallen' en de andere over 'decimale getallen' kan dat verwarrend zijn voor leerlingen. Ook als leerkrachten tijdelijk informele terminologie gebruiken, zoals de 'verliefde harten' voor de splitsingen van 10, of 'erbij' voor 'plus', moeten ze duidelijk met elkaar en de leerlingen afspreken wanneer ze deze vervangen door de formele termen.

Wees precies in het gebruik van reken-wiskundetaal en maak betekenissen expliciet, ook als het gaat om symbolen. Neem het =-teken. Veel leerlingen zien dit symbool als een signaal om te gaan rekenen: werk van

links naar rechts, van de opgave naar de uitkomst. Ze beseffen niet dat het symbool gelijkheid aangeeft. Als ze dat wel begrijpen, helpt dat om verbanden te leggen, bijvoorbeeld 14 : 2,5 = 56 : 10.[51]

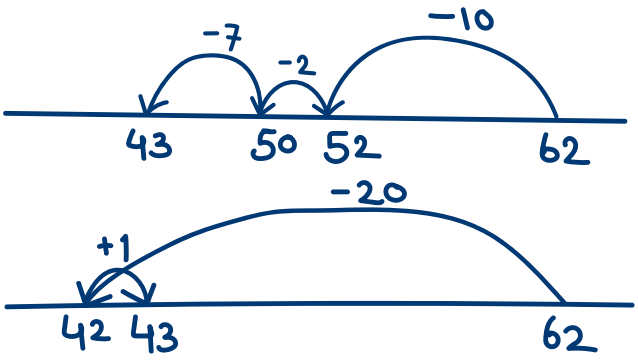
1.4 Laat leerlingen verschillende oplossingsmanieren bespreken en vergelijken

Voor reken-wiskundeopgaven bestaan verschillende oplossingsmanieren. Leerlingen met een rijk reken-wiskundig netwerk kennen verschillende manieren en kunnen daaruit een keuze maken die past bij de opgave en deze onderbouwen. Door leerlingen verschillende oplossingsmanieren te laten vergelijken, begrijpen ze de procedures beter, verrijken ze hun reken-wiskundig netwerk en leren ze hoe ze dat vlot en wendbaar kunnen inzetten.[52]

Je kunt als leerkracht twee uitgewerkte oplossingsmanieren onder elkaar zetten, zoals in figuur 3, en overeenkomsten en verschillen bespreken. Vraag leerlingen wanneer ze de ene en wanneer ze de andere manier zouden gebruiken en waarom. Visuele representaties zoals de getallenlijn kunnen hierbij helpen.

Oplossingsmanieren vergelijken komt in de Nederlandse reken-wiskundemethodes niet veel voor.[53] Het is dus raadzaam hier zelf voor te zorgen. Om leerlingen te leren oplossingsmanieren handig en flexibel in te zetten, werkt het beter om verschillende manieren afwisselend aan te bieden (*interleaved practice*) dan eerst de ene en dan de andere (*blocked practice*).[54]

Figuur 3. De opgave 62 - 19 opgelost op twee verschillende manieren



Voor leerlingen die moeite hebben met rekenen-wiskunde kan het behandelen van verschillende oplossingsmanieren verwarrend zijn. Expliciete instructie van één vaste oplossingsmanier lijkt voor hen het meest geschikt.[55,56] Aan de andere kant blijken ook deze leerlingen goed uit de voeten te kunnen met bepaalde alternatieve oplossingsmanieren, zoals aftrekken via aanvullen.[57] Bovendien helpt het vergelijken van verschillende oplossingsmanieren ook hen om deze manieren flexibel in te zetten.[58] De balans tussen procedures beheersen, begrijpen en flexibel inzetten vraagt om maatwerk. Raakt een leerling erg in de war als je meerdere strategieën aanbiedt, dan houd je het (voorlopig) bij één vaste aanpak. Maar houd voor ogen dat deze leerling (later) – met goede begeleiding – misschien méér aankan en dan ook meer kansen krijgt om een rijk reken-wiskundig netwerk te ontwikkelen.

Bij verschillende oplossingsmanieren gaat het ook over de keuze tussen schattend of precies rekenen, en bij precies rekenen over de keuze tussen rekenen uit het hoofd, met de rekenmachine of met pen en papier. Het is belangrijk dat leerlingen weten en begrijpen hoe en in welke situatie ze welke aanpak kunnen kiezen en wat het gevolg daarvan is.[59,60] Besteed genoeg aandacht aan precies rekenen én aan schattend rekenen, want door precies te rekenen worden leerlingen (ook) beter in schattend rekenen. En door schattend te rekenen worden leerlingen (ook) beter in precies rekenen.[61]

1.5 Laat leerlingen relaties leggen tussen verschillende soorten getallen

Het reken-wiskundige netwerk is nooit af. Het kan altijd nóg steviger en het kan steeds weer worden aangepast en uitgebreid. Het samenhangend netwerk heeft een hiërarchische structuur, waarbij onderdelen op elkaar voortbouwen.[62] Als leerlingen een stap missen of een verbinding niet leggen, kan dat later voor problemen zorgen.

Als het netwerk van de gehele getallen wordt uitgebreid met gebroken getallen, leidt dat tot nieuwe verbindingen. Een breuk is meer dan twee getallen met een streep ertussen.[63] Het kan staan voor deel van een geheel ($\frac{1}{4}$ pizza), deel van een hoeveelheid ($\frac{1}{4}$ deel van de

kralen), een verhouding (1 op de 4 kinderen heeft een zwemdiploma), meetgetal ($\frac{1}{4}$ liter), uitkomst van een deling, getal op de getallenlijn en getal waarmee gerekend kan worden. Bovendien zijn breuken verbonden met decimale getallen en procenten. Schematische tekeningen, denkmodellen, getallenlijnen en meetinstrumenten dragen bij aan het verstevigen van de verbindingen.[64] Ze laten leerlingen ervaren dat breuken ook getallen zijn en hoe en waarom de bekende rekenregels aangepast moeten worden bij breuken.

1.6 Geef meten en meetkunde een stevige plek in het netwerk

Bij meten en meetkunde gaat het om het nadenken over en het verklaren van ervaringen. Bij meten ontdekken leerlingen dat de balans niet in evenwicht blijft als er meer blokjes aan één kant liggen. Of dat het grootste cadeau niet altijd het zwaarste is. Bij meetkunde onderzoeken leerlingen verbanden tussen bouwwerken en plattegronden of voorwerpen en schaduwen. Betekenisvolle verbindingen ondersteunen het toepassen van meten en meetkunde in de wiskunde en de werkelijkheid.

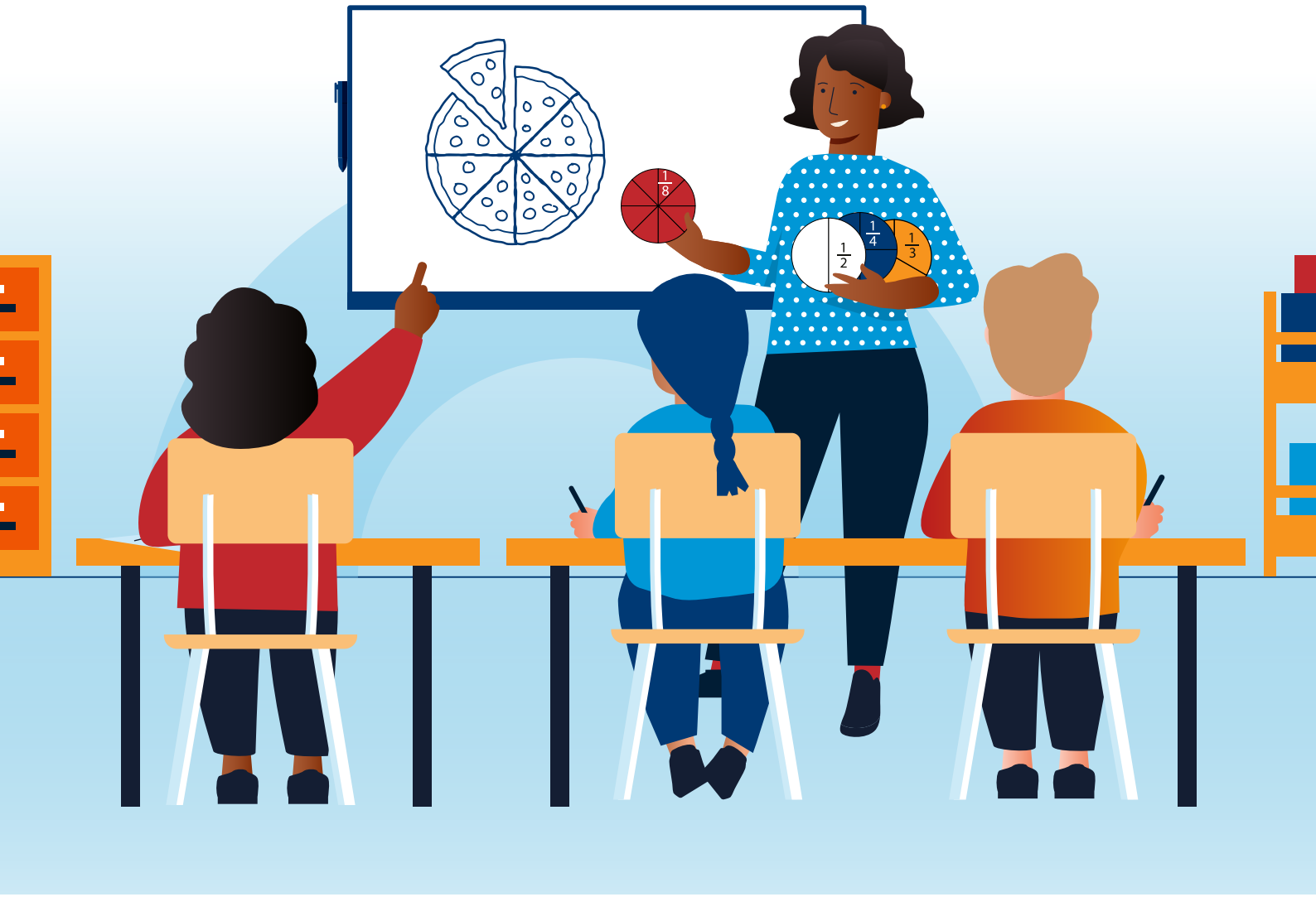
Meten draagt ook bij aan de ontwikkeling van getalbegrip. Meetsituaties geven breuken en decimale getallen betekenis,[65,66] bijvoorbeeld met meetgetallen als een kwartliter, € 2,95 of 21,1 km.

Ook de ruimtelijke vaardigheden die leerlingen bij meetkunde ontwikkelen, zoals routes volgen, plattegronden interpreteren, figuren in gedachten draaien en tangrampuzzels oplossen, dragen bij aan hun getalbegrip.[67,68] Dit komt waarschijnlijk doordat getallen en hun representaties inherent ruimtelijke eigenschappen hebben, zoals de ordening van getallen op een getallenlijn.[69]

Hoe bouw je aan een rijk reken-wiskundig netwerk?

Een rijk reken-wiskundig netwerk bestaat uit stevige, maar flexibele verbindingen tussen kennis, vaardigheden, inzichten, oplossingsmanieren en probleemsituaties uit de wiskunde en de 'echte wereld'. Bouwen aan een rijk reken-wiskundig netwerk kan op allerlei momenten en manieren, zoals met deze vragen en opdrachten:

- Zoek voorwerpen in het lokaal met een rechthoekige vorm.
- 8 + 5 kun je berekenen met een sprong over het tiental. Hoe ziet dat eruit met het rekenrek, de getallenlijn en als je de som opschrijft?
- 3 × 4 = 12. Kun je dat met een tekening laten zien? Waarom is 6 × 4 = 24?
- In de krant staat dat een gemiddeld Nederlands huishouden 275 liter water per dag verbruikt. Hoeveel liter water verbruiken jullie thuis ongeveer, meer of minder dan 275 liter? Leg uit waarom je dat denkt.
- De plattegrond van een pretpark is getekend op schaal 1 : 200. Bekijk de plattegrond. Als je bij het reuzenrad staat, hoe snel kun je dan bij de dichtstbijzijnde toiletten komen? Leg uit hoe je dat berekent.
- Delen door 4 is hetzelfde als vermenigvuldigen met …? Waarom is dat zo?
- Bereken 6 : $\frac{3}{4}$ op drie verschillende manieren. Kun je hier een situatie bij bedenken?
- Een winkel geeft 20% korting op een spijkerbroek van € 80,00. Na een week is die actie voorbij. De winkelier verhoogt de actieprijs met 20%. Kost de broek nu weer € 80,00? Waarom wel of niet?
- Bereken 12,5% van € 88,80. Zou je hier een rekenmachine voor gebruiken? Waarom wel of niet?



1. Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen.
2. **Schakel tussen concreet, schematisch en abstract.**
3. Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel.
4. Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen.
5. Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude.
6. Investeer als school in reken-wiskundeonderwijs.

2 Schakel tussen concreet, schematisch en abstract

Concrete materialen en herkenbare situaties kunnen abstracte wiskundige concepten en procedures betekenisvol en toepasbaar maken. Laat leerlingen materialen en situaties verkennen en nadenken over hun wiskundige structuur. Schema's en modellen kunnen deze structuur weergeven en de ontwikkeling van concreet naar abstract ondersteunen. Ook kunnen ze leerlingen helpen een stap terug te doen als dat nodig is. Leerlingen die verbindingen kunnen leggen tussen het concrete, schematische en abstracte niveau kunnen rekenen-wiskunde beter begrijpen en toepassen.

2.1 Gebruik concrete materialen, herkenbare situaties, schema's en modellen

Concrete materialen kun je vastpakken, draaien, schuiven, vouwen, tellen, verdelen of samenvoegen. Ze vormen een onmisbaar onderdeel van het reken-wiskundeonderwijs, van groep 1 tot en met 8,[70,71] zie kader *Concrete materialen in het reken-wiskundeonderwijs* op pagina 20. Leerlingen onthouden nieuwe reken-wiskundige informatie beter door dingen te doen in plaats van ze alleen te horen of te zien.[72,73,74,75]

Aanvankelijk kunnen de concrete materialen 'echt' zijn, afkomstig uit de belevingswereld van de leerlingen, zoals pizza's of kastanjes. Gaandeweg kun je deze vervangen door materialen die ernaar verwijzen, zoals breukencirkels en fiches. Vervolgens kun je de brug slaan naar getekende breukencirkels en stippen.[76,77] Kies materialen, situaties en modellen die de onderliggende structuur duidelijk representeren.

Belangrijk is dat leerlingen op den duur de verbinding kunnen leggen tussen de concrete materialen en de wiskundige ideeën die ze representeren.[78] Schema's en denkmodellen die steeds iets abstracter worden en zich toespitsen op de wiskundige structuur vormen daarbij een belangrijke tussenstap. Dit wordt in de literatuur *concreteness fading* genoemd, ook wel CRA: concreet-representatie-abstract.[79,80] De representaties (schema's en modellen) vervangen de concrete materialen en handelingen door beelden in het hoofd van de leerling. Deze mentale beelden worden geleidelijk steeds abstracter en ontwikkelen zich tot wiskundige concepten en procedures.[81,82] Uiteindelijk kunnen leerlingen de representaties loslaten en hebben ze abstracte reken-wiskundekennis verworven.

Zo kun je een rekenles concreet beginnen met een situatie die leerlingen kennen uit hun belevingswereld.[83] Snoepjes in een pot doen waar al wat snoepjes inzitten, of juist snoepjes uit die pot halen, laat bijvoorbeeld duidelijk het wiskundige concept van optellen en aftrekken zien. Gaandeweg kun je de concrete handeling vervangen door pijlen, blokjes, stippen, getallen en somnotaties. Een bekend didactisch model dat hierbij aansluit is het handelingsmodel[84] dat uitgaat van vier handelingsniveaus in het leerproces:

1. informeel handelen in werkelijkheidssituaties (doen)
2. voorstellen - concreet (representeren van objecten en werkelijkheidssituaties met concrete afbeeldingen)
3. voorstellen - abstract (representeren van de werkelijkheid met denkmodellen)
4. formeel handelen (formele bewerkingen uitvoeren)

Materialen en modellen kunnen ook in de bovenbouw helpen om de verbinding te leggen tussen concreet en abstract, en zo zorgen voor meer begrip.[85] Denk bij materialen bijvoorbeeld aan een scorebord of een litermaat. Bij modellen kun je denken aan een procentenstrook, rechthoekmodel of verhoudingstabel. Voorbeelden van betekenisvolle situaties zijn het eerlijk verdelen van een reep chocola, of onderzoeken hoeveel kwartliters melk je uit een pak van anderhalve liter kunt halen.

2.2 Help leerlingen de verbinding te leggen tussen concreet, schematisch en abstract

Zorg dat leerlingen begrijpen dat een model een concrete handeling of situatie representeert, en hoe je dat vervolgens weer kunt formaliseren tot een reken-wiskundig idee. Het is belangrijk dat je hier als leerkracht goed zicht op hebt.[86] Begrijpt de leerling dat je drie bootjes met elk vier kinderen kunt representeren met drie sprongen van vier op de getallenlijn, en dat dat een schematische representatie is van 3 × 4? Geef leerlingen voldoende tijd, gelegenheid en ondersteuning. Stap niet te snel over naar het abstracte niveau.[87] Laat ze representaties vergelijken, of zelf schema's of modellen bedenken.[88] Maar gebruik niet te veel verschillende representaties, want dat kan het leren juist weer belemmeren.[89] Zorg voor voldoende begeleiding, bijvoorbeeld door een gestructureerde klassikale discussie of door expliciete instructie.[90,91]

Concrete materialen in het reken-wiskundeonderwijs

Carbonneau en collega's[92] voerden een meta-analyse uit naar het effect van concrete materialen in reken-wiskundeonderwijs. In 55 studies vergeleken onderzoekers een groep leerlingen die instructie kreeg met concrete materialen met een controlegroep die alleen instructie kreeg op abstract niveau. De groepen liepen uiteen van basisonderwijs tot hoger onderwijs. Gemiddeld genomen vonden de studies een klein tot matig positief effect van het gebruik van concrete materialen op de rekenprestaties van leerlingen. Die effectiviteit is groter voor leerlingen van 7 tot 11 jaar dan voor leerlingen van 12 jaar en ouder, maar ook de oudere leeftijdsgroep heeft nog baat bij concrete materialen. Ook het onderwerp maakt uit: effecten zijn het grootst bij breuken en decimale getallen, en kleiner bij meetkunde, bewerkingen en algebra. Tot slot blijkt dat begeleiding bij het gebruik van concrete materialen voor grotere effecten zorgt.

Ook Hawes en collega's[93] vonden in hun meta-analyse naar het stimuleren van ruimtelijk inzicht dat programma's met concrete materialen effectiever zijn dan programma's zonder die concrete materialen.

2.3 Zorg dat leerlingen tot abstracties komen door materiaalgebruik af te bouwen

Materialen zijn tijdelijk: stop ermee als ze niet langer nodig zijn.[94] Sommige leerlingen hebben meer steun nodig en willen de concrete materialen langer gebruiken. Het is goed om daarbij aan te sluiten, maar probeer dit ook bij hen af te bouwen. Je kunt leerlingen vragen een schematische tekening te maken van hun handelen of de handeling alleen in gedachten uit te voeren, terwijl ze kijken naar de materialen. Zoals twee getallen optellen door alleen naar het rekenrek te kijken. Materialen zijn niet bedoeld om het antwoord op een opgave te vinden, maar om de wiskunde te begrijpen die eraan ten grondslag ligt.[95] Materialen en modellen tegelijk aanbieden kan het leerproces bevorderen. Geef leerlingen bijvoorbeeld tijdelijk een kralenketting én de getallenlijn, maar zorg dat ze na verloop van tijd het concrete materiaal loslaten.[96]

Als leerlingen het abstracte niveau bereikt hebben, kunnen de concrete materialen achterwege blijven. Maar ook dan moeten leerlingen nog steeds de verbinding tussen het abstracte niveau van rekenen-wiskunde en concrete situaties kunnen leggen, bijvoorbeeld bij toepassingsopgaven en problemen uit de werkelijkheid.[97]

2.4 Neem in je onderzoek van de ontwikkeling van leerlingen de verschillende niveaus van concreet tot abstract mee

Kijk als je de rekenontwikkeling van leerlingen onderzoekt ook naar de verschillende niveaus van concreet tot abstract.[98] Als een leerling een bepaalde procedure nog niet, of niet meer, op abstract niveau kan uitvoeren, kun je onderzoeken of het met een denkmodel of concrete materialen wel lukt. Een leerling die bijvoorbeeld vastloopt bij de opgave 5 : 1,25 kun je vragen hoeveel ijsjes van € 1,25 je kunt kopen voor € 5,-. Als dit wel lukt, is het nodig om (opnieuw) de verbinding te leggen tussen het concrete handelen en de abstracte procedure.

Omgekeerd komt het voor dat een leerling wel abstracte reken-wiskundige kennis bezit, maar daaraan geen betekenis kan geven. Zo zijn er leerlingen die de splitsingen van 10 feilloos kunnen opnoemen, maar niet kunnen bedenken hoeveel eieren nog in een doos van 10 zitten als er 4 uit zijn. Dat vraagt om nader onderzoek van de wiskundige kennis en vaardigheden van de leerling. Je kunt bijvoorbeeld in een toets of rekengesprek vragen om bij een procedure of kale opgave

een concrete situatie te bedenken of een schematische tekening te maken.[99]

2.5 Zorg voor concrete ervaringen bij meten en meetkunde

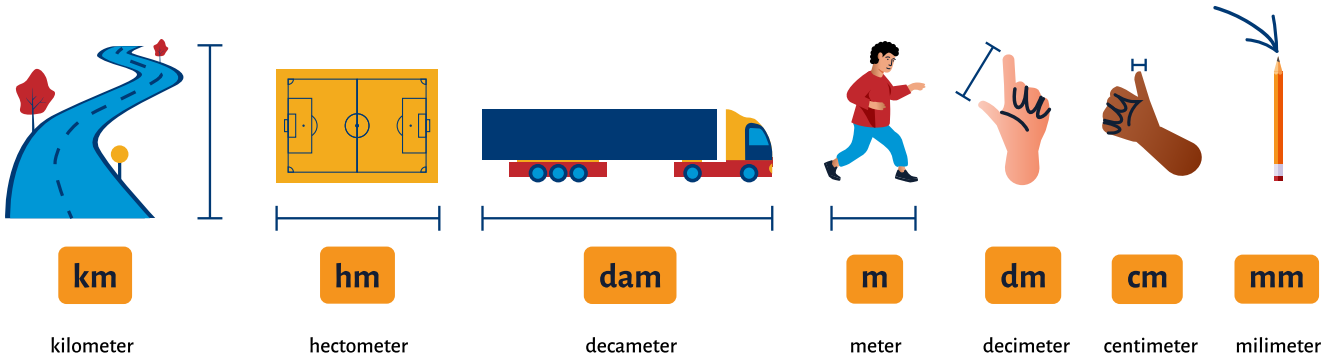
Schakelen tussen concreet en abstract speelt ook een belangrijke rol bij meten en meetkunde.[100,101] Ook daar vormen concrete ervaringen vaak het begin van het leerproces. Leerlingen die moeite hebben met getallen en hoeveelheden kunnen bovendien profijt hebben van het concrete handelen bij meten en meetkunde. Daarnaast werkt het actieve en creatieve karakter van dit soort opdrachten vaak ook nog eens extra motiverend.[102]

Meten

De meeste leerlingen komen naar school met veel concrete ervaringen en informele kennis over meten. Ze staan op de weegschaal of langs de meetlat, ze mogen helpen een taart bakken, kennen de klok, weten dat een auto sneller rijdt dan een fiets en een olifant zwaarder is dan een muis. In het basisonderwijs worden hun concrete ervaringen met de grootheden lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht, tijd en snelheid, verder uitgebreid. Laat leerlingen bijvoorbeeld hun omgeving opmeten. Eerst met natuurlijke maten als stappen, kopjes, en pittenzakken, later met standaardmaten, waarbij ze officiële meetinstrumenten gebruiken. Zo bouwen ze geleidelijk het metriek stelsel op (1 meter = 10 decimeter = 100 centimeter).

Het is noodzakelijk om goed te oefenen met metrieke omzettingen, maar het risico bestaat dat deze omzettingen op den duur hun betekenis verliezen en ontaarden in abstract komma-schuiven. Verbind omzettingsopgaven met concrete meetervaringen om dat te voorkomen. Laat leerlingen voelen hoe zwaar een kilogram is, ervaren hoe ver een kilometer lopen is, zien hoe klein een milliliter is.[103,104] Zie ook het kader *Meten en rekenen met een babyolifantje* op pagina 23. Alleen naar afbeeldingen van maten kijken zoals in onderstaande afbeelding, is niet genoeg, omdat de maten niet in de juiste onderlinge verhouding en afmetingen zijn weergegeven. Verbind daarom elke maat uit het metriek stelsel zoveel mogelijk met een concrete meetervaring, een zogenoemde referentiemaat. Dit maakt kennis en vaardigheden over meten betekenisvol en toepasbaar. Het kader *Gangbare meetreferenties en referentiematen*, zie pagina 23, geeft handvatten hoe leerlingen een verzameling meetreferenties en referentiematen kunnen opbouwen.

Figuur 4. Referentiematen voor de grootheid 'lengte'.



Meetkunde

Ook in het meetkundeonderwijs spelen concrete handelingen en herkenbare situaties een belangrijke rol. Leerlingen verkennen de ruimte binnen en buiten de school. Ruimtelijk inzicht, een belangrijk onderdeel van meetkunde, is niet iets wat je wel of niet hebt, maar iets wat je kunt ontwikkelen.[105,106] Tijdens het verkennen van de ruimte ontdekken en begrijpen leerlingen meetkundige concepten en structuren, zoals projecties, schaduwen en gespiegelde beelden.[107] Concrete meetkundige ervaringen zijn bijvoorbeeld vouwen, bouwen, spiegelen, draaien, projecteren, routes volgen, vormen herkennen, verstoppertje en schaduwtikkertje spelen.

Stel leerlingen vragen over hun concrete ervaringen, die het denken over meetkundige concepten uitlokken en die meetkundig redeneren stimuleren als: hoe zit het in elkaar? Welke vorm heeft het? Hoe ziet het er van bovenaf uit? Langs welke route kun je daar komen? Zo daag je leerlingen uit verbindingen te leggen tussen concrete ervaringen en meetkundige structuren en figuren. Zorg voor voldoende variatie in de concrete ervaringen en de schematische representaties. Zo zijn er leerlingen die een vierkant niet herkennen als het 'schuin' is weergegeven.[108] Het kader *Ervaren, verklaren, verbinden* hieronder beschrijft de didactische drieslag die leerlingen kan ondersteunen op hun leerweg van concrete meetkunde-ervaringen naar abstracte meetkundige concepten.

Voor gezamenlijke gesprekken over meetkundige ervaringen en concepten hebben leerlingen een geschikte meetkundige woordenschat nodig. Deze bevat alledaagse woorden als achterkant, voorkant, linksaf, cirkel, driehoekig, bovenaanzicht en plattegrond,[109] maar ook vaktermen als kijklijnen, hoogtegetallen, aanzichten en uitslagen. Een betekenisvolle meetkundetaal helpt leerlingen om hun concrete meetkundige ervaringen uit te wisselen en te verklaren, en zo meetkundig inzicht op te doen.

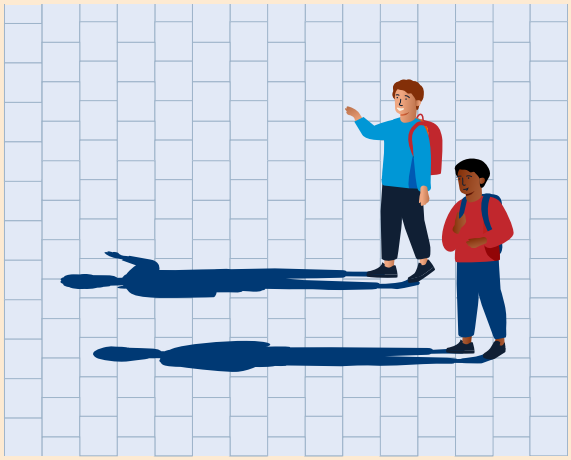
Ervaren, verklaren, verbinden

Met de didactische drieslag ervaren - verklaren - verbinden kun je als leerkracht leerlingen helpen om vanuit concrete meetkunde-ervaringen tot abstracte meetkundige concepten te komen.[110]

Ervaren
Leerlingen doen ervaring op met een concreet meetkundig object of verschijnsel, bijvoorbeeld schaduw. Ze ervaren dat er niet altijd schaduw is, dat schaduwen elkaar kunnen overlappen en dat schaduwen gedurende de dag veranderen van vorm en richting. Laat leerlingen hun ervaringen verwoorden.

Verklaren
(Iets oudere) leerlingen reflecteren op hun ervaringen en zoeken naar verklaringen. Door een stokje in de grond te steken en de schaduw te observeren, kunnen leerlingen gedurende een zonnige dag ontdekken dat er een verband is tussen de stand van de zon en de vorm en richting van de schaduw.

Verbinden
Leerlingen gebruiken hun ervaringen en verklaringen in een nieuwe meetkundige situatie en ontwikkelen kennis over meetkundige concepten, zoals projecteren. Laat ze bijvoorbeeld beredeneren en met een schematische tekening onderbouwen op welk moment van de dag onderstaande afbeelding is gemaakt.



Gangbare meetreferenties en referentiematen

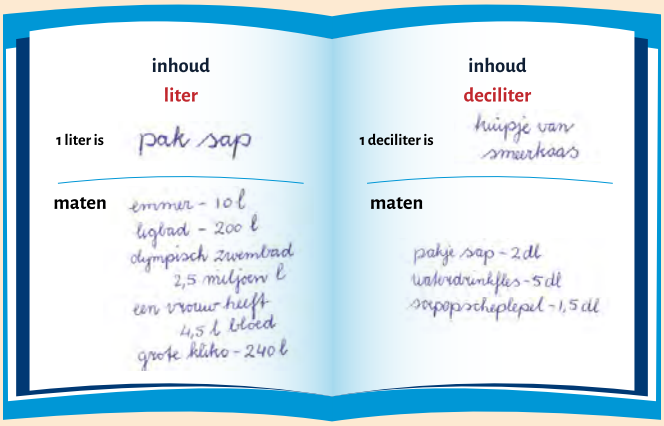
Laat leerlingen referentiematen ervaren, zodat ze zich bij alle maten uit het metriek stelsel iets concreets kunnen voorstellen. Bijvoorbeeld: 1 liter is een pak vruchtensap, 1 gram is het gewicht van een pilletje en 1 kubieke centimeter is een dobbelsteen.

Daarnaast is het handig als leerlingen een flinke voorraad meetreferenties paraat hebben, zoals: een volwassen man is gemiddeld 1,80 meter lang en weegt 80 kilogram, een kartonnen bekertje heeft een inhoud van 2 deciliter en een normale wandelsnelheid is 5 kilometer per uur.

Als leerlingen een voorraad concrete referentiematen en meetreferenties paraat hebben, kunnen ze daar in de reken-wiskundeles veel profijt van hebben:

- Leerlingen kunnen daarmee formele, metrieke omzettingen controleren.
- Het komt van pas bij beredeneerd schatten.
- Leerlingen kunnen daarmee meetgegevens kritisch beoordelen.
- Het vormt een concrete basis om te redeneren en rekenen met decimale getallen.

In een persoonlijk matenboekje kunnen leerlingen referentiematen en meetreferenties verzamelen. Zorg dat ze in een schrift per pagina één maat uit het metriek stelsel noteren. Houd de maten per grootheid (lengte, gewicht enzovoort) bij elkaar. Onder elke maat noteren de leerlingen één referentiemaat die ze kennen uit hun eigen ervaring. Daaronder schrijven ze verschillende meetreferenties die in die maat zijn weergegeven en die ze ergens zijn tegengekomen. Leer leerlingen kritisch te zijn en nieuwe meetreferenties te controleren. Je kunt ook een klassikaal matenboekje aanleggen. Zodra er een betekenisvolle maat langskomt kun je die samen toevoegen.



Meten en rekenen met een babyolifantje

In de plaatselijke dierentuin is een olifantje geboren met een geboortegewicht van 100 kg. Om dit gewicht voorstelbaar te maken, vraagt de juf van groep 5 hoe zwaar mensenbaby's zijn bij hun geboorte. De leerlingen komen uit op 6 pond, en de juf laat met het gewicht van een vol waterflesje voelen hoe zwaar een pond is. Het gewicht van een baby komt dus overeen met ongeveer zes waterflesjes. Hoe zwaar zou 100 kg zijn? De leerlingen stappen om de beurt op de weegschaal. De stagiair doet dat ook en weegt 80 kg. Om daar 100 kg van te maken is nog een kleuter uit groep 2 nodig die 19 kg weegt, en twee waterflesjes.

Om de leerlingen te laten ervaren hoe zwaar 100 kg 'voelt', gaan de stagiair en de kleuter met twee waterflesjes op een kleed in de zandbak liggen. Alle kinderen uit groep 5 tillen met elkaar dit gewicht een klein stukje op. Ze zullen nu nooit meer vergeten hoe zwaar 100 kg is.

1. Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen.
2. Schakel tussen concreet, schematisch en abstract.
3. **Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel.**
4. Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen.
5. Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude.
6. Investeer als school in reken-wiskundeonderwijs.

3 Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel

Leerlingen verschillen in hun reken-wiskundige ontwikkeling en onderwijsbehoeften. Door te observeren en vragen te stellen kom je erachter wat leerlingen kennen, kunnen en denken. Kies vervolgens passende leerdoelen, werkvormen, opdrachten en instructievormen. Je kunt ook variëren in duur, omvang en moeilijkheidsgraad van je onderwijs en schakelen in abstractieniveau.

3.1 Zorg dat je doelen en leerlijnen kent, en werk doelgericht

Leerlijnen geven richting aan het onderwijsproces. Ze beschrijven een geïdealiseerde weergave van de ontwikkeling van leerlingen, en vormen zo een doordachte opbouw van tussendoelen naar een bepaald einddoel.[111] Kennis van leerlijnen is onmisbaar als je doelgericht reken-wiskundeonderwijs wilt geven.[112] Op basis van die kennis kun je beargumenteerd afwijken van de methode wanneer de ontwikkeling en onderwijsbehoeften van je leerlingen daarom vragen. Zorg ook dat je weet hoe het leerproces gaat en welke fouten leerlingen vaak maken.[113,114] Dit helpt je te onderzoeken wat leerlingen wel of niet kunnen, daarbij aan te sluiten en je te richten op de volgende stappen van de leerlijn.[115]

Betrek je leerlingen bij de leerdoelen. Zorg dat ze begrijpen hoe de onderwijsactiviteiten helpen die doelen te bereiken[116] en hoe ze kunnen evalueren in hoeverre doelen bereikt zijn. Hiervoor kun je 'leerlingvriendelijke' versies van de doelen formuleren. Je kunt de doelen voor de leerlingen weergeven op posters of hand-outs, eventueel voorzien van pictogrammen. Als je vooraf, tijdens en na afloop van de instructie aan de doelen refereert, zijn de leerlingen meer gefocust en beter in staat hun eigen leren te beoordelen en te monitoren.[117,118] Het bevordert ook hun motivatie en betrokkenheid.

3.2 Stel geregeld vast wat leerlingen kennen, kunnen en denken

Kennis van je leerlingen vormt de basis voor je onderwijs.[119] Leerkrachten die informatie verzamelen over het kennen, kunnen en denken van hun leerlingen als integraal onderdeel van hun onderwijs, bereiken betere resultaten.[120] Probeer dat dus voortdurend en op allerlei manieren in beeld te krijgen.[121,122]

Een belangrijke informatiebron zijn de meer of minder gestandaardiseerde toetsen, zoals de bloktoets van de methode of de halfjaarlijkse leerlingvolgsysteem-toets. Het is niet verstandig om alleen deze toetsmomenten te gebruiken om vorderingen van je leerlingen in beeld te krijgen. Benut elke kans om leerlingen vragen te stellen of uit te nodigen hun gedachten te presenteren. Je kunt allerlei middelen gebruiken om het kennen, kunnen en denken van de leerlingen te monitoren, zoals observaties, klassikale of individuele gesprekken, wisbordjes, quizjes of toetsjes.[123,124]

Wat je ook doet om de ontwikkeling van de leerlingen te peilen, zorg dat je verder kijkt dan het goede antwoord. Stimuleer leerlingen om hun berekeningen en oplossingsmanieren duidelijk in hun schrift te schrijven en bekijk deze. Neem bijvoorbeeld de leerling die 56 als antwoord geeft bij 7×125. Op de vraag hoe hij daaraan is gekomen, legt hij uit: $7 \times 1 + 7 \times 2 + 7 \times 5 = 56$. Daaruit blijkt dat zijn inzicht in het positiesysteem tekortschiet. Bovendien heeft hij niet opgemerkt dat zijn uitkomst kleiner is dan een van de twee factoren. Hier is meer aan de hand dan de vereiste procedure niet kunnen uitvoeren. Geef leerlingen genoeg ruimte om vragen te stellen. Laat leerlingen hardop denken.

3.3 Sluit aan bij de ontwikkeling en de onderwijsbehoeften van álle leerlingen

Als je weet wat je leerlingen kennen, kunnen en denken, kun je daarbij aansluiten wanneer je werkt aan je doelen.[125,126] Activeer voorkennis en kies instructievormen en opdrachten die passen bij het doel en bij de leerlingen. Geef feedback die leerlingen verder helpt.

Activeer voorkennis

Aansluiten bij de leerlingen begint al met het peilen en activeren van voorkennis aan het begin van de les. Zo kun je vaststellen of het leerdoel past bij de ontwikkeling van de leerlingen, en geef je leerlingen de gelegenheid om wat ze gaan leren te verbinden met wat ze al weten. Als er onvoldoende voorkennis aanwezig blijkt te zijn, is het niet aan te raden deze even snel 'toe te dienen'. Je kunt het leerdoel in dat geval beter aanpassen. Stem je onderwijs af op de leerlingen, niet andersom. Het kader *Leerdoel aanpassen*, zie pagina 30, geeft een voorbeeld.

Differentieer als dat nodig is

Bij grote verschillen binnen de groep moet je differentieren: inspelen op verschillen, door je doelen, instructie of verwerking aan te passen.[127] Dat kan bij gezamenlijke activiteiten, bijvoorbeeld door sommige leerlingen nog concrete materialen te laten gebruiken, terwijl anderen al op schematisch of abstract niveau werken. Als dat niet toereikend is, zorg dan voor extra activiteiten, ondersteuning, instructie en leertijd voor individuele of kleine groepjes leerlingen. Bijvoorbeeld door *tutoring*, verlengde instructie en (digitale) oefenprogramma's. Afgestemde instructie geven is niet aanreiken en herhalen wat in eerste instantie niet overkwam, maar aansluiten bij het handelen en denken van de leerlingen. Van daaruit kun je hen een stap verder helpen.

Differentiatie vraagt meestal om een systematische en stapsgewijze aanpak. Je kunt hiervoor verschillende differentiatiemodellen gebruiken, zoals de differentiatiecyclus[128] en het ADAPT-model.[129] Het is cruciaal om de groepsindeling steeds bij te stellen, afhankelijk van het doel en de prestaties van leerlingen op dat doel.[130]

Beheersingsleren (of *mastery learning*) is een differentiatiemethode die ervoor zorgt dat alle leerlingen van de groep bij elkaar blijven en niemand achterop raakt. De leerkracht biedt pas iets nieuws aan als iedereen de stof beheerst.[131] Beheersingsleren heeft vooral meerwaarde bij leergebieden waarin nieuwe stof voortbouwt op wat al is geleerd, zoals bij veel reken-wiskundeonderdelen. Een belangrijk aspect van beheersingsleren is differentiatie in leertijd. Leerlingen die meer tijd nodig hebben krijgen steun- of maatwerkuren, *tutoring* en extra digitale oefenprogramma's. Leerlingen die de stof al beheersen, voeren activiteiten uit ter verrijking en verdieping.

Passende instructievormen

Instructievormen zijn grofweg te verdelen in expliciete (directe) en begeleidende instructie. In het eerste geval geeft de leerkracht structuur, legt de concepten en procedures uit en doet voor hoe leerlingen deze kunnen toepassen. In het tweede geval krijgen de leerlingen meer ruimte om te denken en onderzoeken, maar heeft de leerkracht nog steeds een belangrijke rol in de begeleiding van het leerproces. Beide instructievormen hebben sterke punten. Het hangt af van het doel, de inhoud en de voorkennis van de leerlingen wat het best past (zie Kader *Verschillende instructievormen*, hieronder). Het is dus belangrijk dat leerkrachten verschillende instructievormen kunnen inzetten en deze bewust kiezen.

Verschillende instructievormen

Verschillende overzichtsstudies naar de effectiviteit van expliciete instructie en begeleidende instructie laten zien dat beide aanpakken effectief kunnen zijn. Er is geen overtuigend bewijs dat de ene aanpak altijd beter werkt dan de andere.[132,133,134,135] De effectiviteit hangt af van de leerlingen, de leerkracht, de context en de inhoud.[136]

Expliciete instructie werkt goed en efficiënt bij gestructureerde (basis)kennis, zoals beheersing van de rekenfeiten en procedures.[137] Leerlingen die moeite hebben met rekenen hebben baat bij een instructiestijl waarbij de leerkracht het leerproces meer stuurt en oplossingsmanieren aanreikt.[138] Een veelgebruikt instructiemodel is expliciete directe instructie (EDI), een verfijning van het klassieke model voor directe instructie.[139] Het EDI-model is leerkrachtgestuurd, maar er is ook veel aandacht voor leerlingen activeren.[140]

Voor conceptuele kennis of hogere-ordedoelen zoals probleemoplossen en flexibel en handig rekenen, is een instructiestijl met ruimte om zelf te ontdekken en ervaren effectiever.[141,142] Cruciaal hierbij is passende begeleiding die aansluit bij voorkennis of die voorkennis eerst versterkt.[143] Zo kunnen alle leerlingen deze doelen zoveel mogelijk bereiken en ervaring opdoen met denken, redeneren en zelf een aanpak bedenken.

Het is geen kwestie van of-of: je kunt verschillende instructievormen combineren. Bijvoorbeeld door leerlingen eerst te laten verkennen, wat ervoor zorgt dat ze daarna beter kunnen leren van expliciete instructie. Of door juist eerst expliciete instructie te geven, zodat leerlingen voldoende voorkennis hebben om vervolgens zelf te exploreren.[144] Doordacht variëren in instructievormen, afhankelijk van doel, domein en voorkennis van de leerlingen, biedt hun optimale ontwikkelkansen. Dat vereist vakmanschap van de leerkracht.[145]

Passende opdrachten

Kies opdrachten die aansluiten bij het doel van de les, de leerlingen en je werk- en instructievorm. Als het doel van de les is dat leerlingen bepaalde concepten of procedures onderzoeken of ontdekken, moet de opdracht daarvoor geschikt zijn. Zoek een herkenbare situatie met een duidelijke wiskundige structuur waarmee leerlingen begrip kunnen ontwikkelen.[146,147] Zorg daarbij ook voor voldoende begeleiding. Met oefenopgaven kun je kennis memoriseren of procedures automatiseren.

Zet digitale middelen doordacht in

In het reken-wiskundeonderwijs zetten leerkrachten regelmatig digitale middelen in, zoals de software die bij een reken-wiskundemethode hoort, oefenprogramma's of digitale adaptieve platforms.[148] Met digitale middelen kun je nauw aansluiten bij het doel en het niveau van je leerlingen en krijg je zicht op de voortgang van je leerlingen.[149] Een aandachtspunt is dat digitale middelen slechts beperkte mogelijkheden bieden om een beeld te krijgen van hoe leerlingen denken en redeneren. Het gaat vaak uitsluitend om het goede antwoord en niet om de manier waarop de leerling dat antwoord vond.

Zet digitale middelen doordacht in: passend bij de leerdoelen en bij de ontwikkeling en onderwijsbehoeften van de leerlingen.[150] Ze ondersteunen het onderwijs, maar zijn nooit een vervanging. Ze kunnen een positief effect hebben, maar wees bedacht op eventuele nadelen zoals het risico dat leerlingen hun berekeningen niet opschrijven. De leerkracht blijft uiteindelijk onmisbaar.[151]

Geef feedback die leerlingen verder helpt

Feedback is essentieel voor ieder leerproces. Deel een 'leerlingvriendelijke' versie van de leerdoelen met de leerlingen en geef feedback over hun vorderingen. Zo maak je leerlingen medeverantwoordelijk voor hun eigen leerproces. Feedback geven betekent: leerlingen informeren over hun voortgang ten opzichte van het gestelde doel en hoe ze eventueel verder aan dat doel kunnen werken.[152,153] Alleen correctieve feedback geven (het antwoord is goed of fout), zoals in veel educatieve software gebeurt, heeft niet zoveel zin.[154]

Tips voor effectieve feedback tijdens de reken-wiskundeles:[155]

- Wees specifiek, accuraat en duidelijk. Dus in plaats van "Optellen gaat beter" zeg je bijvoorbeeld: "Bij rijgend optellen met de getallenlijn maak je nu grote sprongen in plaats van hupjes van 1. Dat gaat een stuk sneller." Illustreer dit met een voorbeeld uit het werk van de leerling.
- Geef feedback die leerlingen aanzet tot denken. Bijvoorbeeld: "Kun je bedenken wat er mis is gegaan toen je opschreef: 50 m = 5 dm? Hoe ziet 50 m eruit?" Geef niet alleen feedback op fouten. Bespreek ook voorbeelden die laten zien wat de leerling wél beheerst.
- Geef feedback waarin je laat zien wat leerlingen goed doen, vergeleken bij wat ze eerder deden.[156] Bijvoorbeeld: "Wat goed dat je nu opschrijft hoe je gedacht hebt en niet alleen het antwoord geeft!"
- Laat zien waaraan leerlingen nog aandacht moeten besteden en spoor ze aan dat te doen. Bijvoorbeeld: "Je hebt in twee tafels nog veel foutjes gemaakt. Welke tafels zijn dat? Wat kunnen we daaraan doen?"
- Geef specifieke tips over wat leerlingen kunnen doen om zich te verbeteren. Als een leerling veel rekenfouten maakt kun je bijvoorbeeld zeggen: "Probeer als je een antwoord hebt gevonden, door schattend rekenen te controleren of het zou kunnen kloppen." Illustreer dat met een voorbeeld uit het werk van de leerling.
- Voorkom dat feedback onnodig veel tijd kost. Een korte, mondelinge opmerking kan soms al heel effectief zijn.[157]

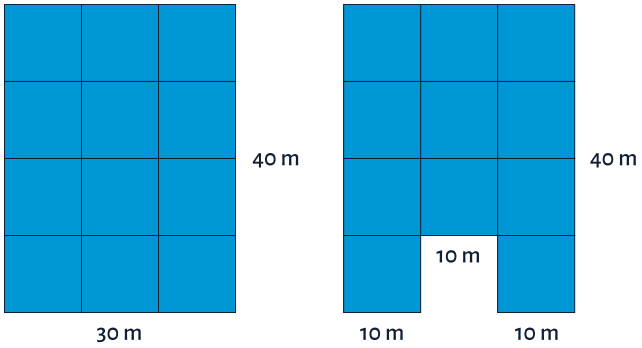
3.4 Help leerlingen na te denken over veelvoorkomende fouten en misconcepties

Je kunt misconcepties (ook wel: preconcepties) 'tijdelijke waarheden' noemen: leerlingen gebruiken ideeën en opvattingen die eerder wél werkten in een nieuwe situatie waarin ze niet passen, zie het kader *Voorbeelden van pre- en misconcepties* hieronder. Zo hebben veel leerlingen tijdelijk de misconceptie dat vermenigvuldigen altijd groter en delen altijd kleiner maakt. Zodra breuken hun intrede doen, wordt het tijd om dat bij te stellen.[158] Bij $4 \times 8 = 32$ is het product groter dan beide factoren, bij $\frac{1}{4} \times 8 = 2$ niet.

Misconcepties vormen een wezenlijk onderdeel van de wiskundige ontwikkeling en bevatten meestal elementen waarop je verder kunt bouwen. Het is daarom niet noodzakelijk om misconcepties te voorkomen of ze onmiddellijk te repareren.[159]

Als je als leerkracht weet wat veelvoorkomende misconcepties zijn, kun je ze in het denken en handelen van leerlingen herkennen en erop inspelen.[160] Probeer goed naar de informele redenering van leerlingen te luisteren en hun ideeën te begrijpen.[161] Probeer samen met je leerling te onderzoeken hoe de misconceptie is ontstaan, binnen welk gebied het idee wel klopt, en wanneer en waarom dat op andere terreinen niet zo is. Dit kun je bijvoorbeeld doen door tegenvoorbeelden te gebruiken.[162] Zo kunnen leerlingen na verloop van tijd hun misconceptie aanpassen.

Figuur 5. Voorbeeld van hoe je de misconceptie dat een figuur met de grootste omtrek ook altijd de grootste oppervlakte heeft kunt weerleggen met een tegenvoorbeeld.



omtrek	140 m	omtrek	160 m
oppervlakte	1200 m²	oppervlakte	1100 m²

Voorbeelden van pre- en misconcepties

Laat leerlingen fouten en misvattingen onderzoeken en erover discussiëren in de klas.[163] Ze begrijpen de lesstof hierdoor beter en het geeft je veel informatie over hun denken en redeneren. Hieronder staan enkele stellingen die je aan je leerlingen kunt voorleggen. Stel hierbij vragen als: "Is dit fout? En waarom wel of niet?"

- De juf verdeelt een plak gevulde speculaas in 4 stukken, als volgt:

  Eén kind zegt: "Dit is niet eerlijk. De stukken zijn niet even groot, want ze hebben niet allemaal dezelfde vorm."
- Tijdens het ganzenborden merkt een speler op: "Er is al heel lang geen 6 gegooid. Dus de kans dat ik nu 6 ga gooien is heel groot."
- Een vierkant is een rechthoek, dus een rechthoek is een vierkant.
- Een vierkante meter is altijd een vierkant van 1 meter bij 1 meter.
- $\frac{1}{8}$ is groter dan $\frac{1}{2}$, want 8 is groter dan 2.
- In groep A is 10% van de leerlingen geslaagd voor de toets. In groep B is 20% van de leerlingen geslaagd voor de toets. Dus in groep B zijn er meer leerlingen voor de toets geslaagd dan in groep A.

3.5 Ondersteun leerlingen die het nodig hebben met gestructureerde interventies

Door zorgvuldig en regelmatig te onderzoeken en evalueren wat leerlingen kennen, kunnen en denken, kom je erachter welke extra ondersteuning ze eventueel nodig hebben. Als rekenproblemen hardnekkig zijn, is het belangrijk om tijdig interventies in te zetten.[164] Anders raken leerlingen achterop en bestaat het risico dat ze een negatieve houding over rekenen-wiskunde of rekenangst ontwikkelen. Je kunt handelingsplannen, *preteaching*, remediëring en verlengde instructie inzetten. Zorg voor expliciete en systematische interventies, die bestaan uit oplossingsmanieren voordoen, begeleide oefening, feedback en herhaling van eerder geleerde stof.[165]

Interventies moet je goed plannen, met een doordachte inzet van middelen inclusief personeel, onder wie onderwijsassistenten.[166] Maak voor de leerlingen een duidelijke koppeling tussen de interventie en de klassikale rekenles, zodat ze begrijpen wat het hun oplevert. Zorg voor rekenactiviteiten uit herkenbare situaties of waar leerlingen plezier aan beleven, zodat ze rekenen-wiskunde niet (nog meer) gaan associëren met saai of spannend. Zet bijvoorbeeld dobbelspelletjes in. Kijk ook goed naar wat leerlingen mogelijk missen vanuit de gewone reken-wiskundeles, zoals essentiële inhoud of motiverende activiteiten.

3.6 Bied leerlingen die het aankunnen uitdagende en verdiepende activiteiten met instructie en begeleiding

Vergeet ook de (potentieel) hoogpresterende rekenaars niet. Zij krijgen vaak onvoldoende uitdagende instructie en worden zonder begeleiding aan het werk gezet.[167,168,169] Deze leerlingen hebben lesstof en activiteiten nodig die hen stimuleren de diepte in te gaan, en die hen aanzetten om te redeneren over aanpakken voor complexe reken-wiskundige vraagstukken.[170] Hierbij hebben ze begeleiding en instructie nodig. Volg hun voortgang en geef feedback. Er zijn ook leerlingen die niet op alle reken-wiskundige onderdelen hoog presteren. Laat hen aansluiten bij de gewone groep als dat nodig is en aanhaken bij de verdiepende en verrijkende activiteiten als het kan.

Je kunt een vast instructiemoment in de rekenles plannen voor de hoogpresterende rekenaars.[171] Daarnaast kun je een plusklas rekenen-wiskunde opzetten of leerlingen laten meedoen aan uitdagende buitenschoolse reken-wiskundeactiviteiten, zoals wiskundeclubs, -kringen en -wedstrijden. Zorg ook voor inspirerende rolmodellen en jeugdboeken om deze leerlingen te stimuleren, enthousiasmeren en uitdagen.

Veelbelovende rekenaars

Op de themapagina *Veelbelovende rekenaars in groep 3-8* lees je hoe je kunt aansluiten bij de onderwijsbehoeften van leerlingen met talent voor rekenen-wiskunde. De themapagina vind je op *www onderwijskennis.nl/themas/veelbelovende-rekenaars-in-groep-3-8*

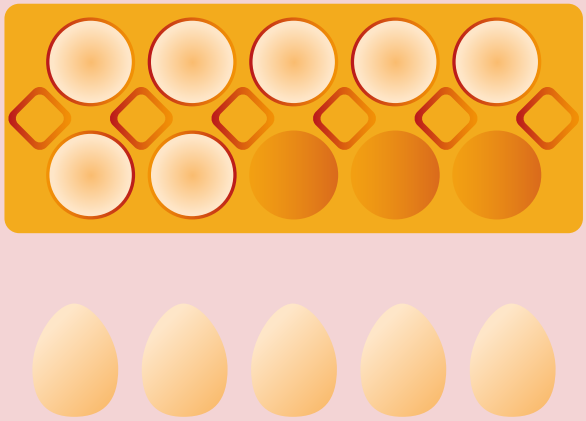
Leerdoel aanpassen

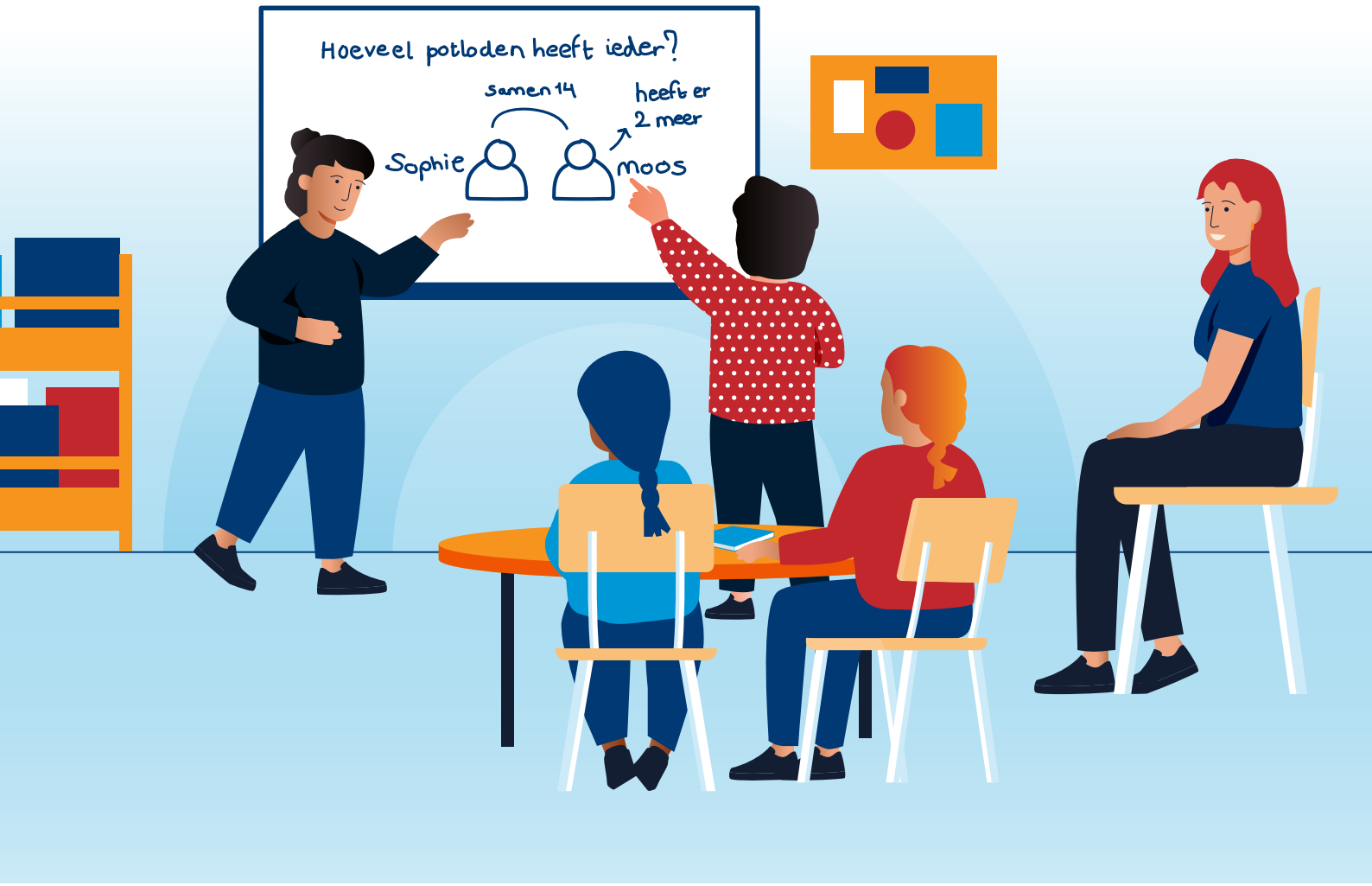
Een leerkracht werkt met groep 3 aan het automatiseren van optellen over het tiental door splitsend aanvullen tot 10. Het gaat om opgaven als 7 + 8 berekenen via 7 + 3 + 5 = 15.

Bij het activeren van voorkennis laten de leerlingen zien dat ze prima in staat zijn om aan te vullen tot 10 (zoals 7 + … = 10) en ook vanaf 10 verder kunnen rekenen (zoals 10 + 5 = …). Maar vervolgens blijkt dat ze die kennis niet gebruiken bij optellen over het tiental. De leerlingen berekenen bijvoorbeeld 7 + 5 via 7 + 1 + 4 = 12. Ze doorzien het voordeel van de sprong naar 10 nog niet.

Voor de leerkracht is de verleiding groot om dit even snel te repareren met "Jullie moeten eerst naar 10 springen", om daarna verder te gaan met de automatiseringsles. Maar het is verstandiger om de leerlingen eerst met concreet of schematisch materiaal (zoals de eierdoos en de getallenlijn) te laten ervaren waarom de sprong naar het tiental handiger is. Het automatiseren komt later wel.

Figuur 6. Het gebruik van gestructureerde materialen zoals een eierdoos om leerlingen te laten ervaren dat 7 + 5 = 7 + 3 + 2.





1. Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen.
2. Schakel tussen concreet, schematisch en abstract.
3. Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel.
4. **Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen.**
5. Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude.
6. Investeer als school in reken-wiskundeonderwijs.

4 Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen

De kern van het reken-wiskundeonderwijs is dat leerlingen hun kennis en vaardigheden leren gebruiken in allerlei situaties binnen en buiten de school. Leerlingen moeten daarom met een breed scala aan opgaven in aanraking komen. Ook met reken-wiskundige problemen waarvoor ze geen kant-en-klare aanpak hebben. Laat ze hierbij zelf oplossingsmanieren bedenken en uitwisselen. Een leerkracht die leerlingen zorgvuldig begeleidt maar het denkwerk niet wegneemt, die hen uitdaagt maar niet frustreert, en die zorgt dat leerlingen leren van en met elkaar, is hierbij onmisbaar.

4.1 Bied alle leerlingen alle soorten reken-wiskundige opgaven aan

Laat álle leerlingen ervaring opdoen met verschillende soorten opgaven: van opgaven waar ze direct een aanpak voor weten (routineopgaven) tot reken-wiskundige problemen waarvoor ze niet direct een aanpak paraat hebben en zelf een oplossingsmanier moeten bedenken (non-routineopgaven).

Routineopgaven

Reken-wiskundemethodes besteden over het algemeen veel aandacht aan routineopgaven. Dat kunnen contextloze opgaven zijn, zoals 7 + 6 = … of 25% van 120 = …. Daarnaast bieden reken-wiskundemethodes veel contextopgaven aan, ook wel toepassingsopgaven genoemd. Deze opgaven beschrijven een situatie met tekst en/of een illustratie, die je meestal in een bewerking kunt vertalen, bijvoorbeeld: 1 broodje kaas kost 4 euro. Joris koopt 3 broodjes. Hoeveel moet hij betalen?

Een veelgebruikt didactisch model bij het oplossen van contextopgaven is het drieslagmodel.[172] Dit bestaat uit deze fasen:

1. Betekenis verlenen
De leerling geeft de situatie die in de context wordt gepresenteerd wiskundige betekenis, wat meestal leidt tot het noteren van de bewerking. In het voorbeeld van de broodjes kaas herkennen de leerlingen de bewerking 3 × 4.

2. Uitvoeren
De leerling voert de bewerking uit. In het voorbeeld berekent of kent de leerling de uitkomst van 3 × 4 = 12.

3. Reflecteren
De leerling overweegt of het gevonden antwoord inderdaad de oplossing van het probleem kan zijn. In het voorbeeld koppelt de leerling de uitkomst 12 terug naar de vraag en concludeert dat het antwoord 12 euro is.

Als leerlingen moeite hebben om de bewerking(en) in contextopgaven te herkennen, kan het helpen om ze de opgaven op verschillende manieren te laten weergeven. Bijvoorbeeld met materialen, modellen, tekeningen, spel, symbolen of als formele bewerking.[173,174,175,176] Zo krijgen ze grip op de onderliggende wiskundige structuur. Je kunt leerlingen ook de opdracht geven om zelf een contextopgave te bedenken, bijvoorbeeld bij een gegeven bewerking. Dit heeft niet alleen een positief effect op hun begrip, maar bevordert ook een positieve houding tegenover rekenen-wiskunde.[177,178,179]

Leerlingen moeten de bewerking(en) in een contextopgave vlot gaan herkennen. Het risico bestaat dat leerlingen de stap van betekenisverlening overslaan en klakkeloos de meest voor de hand liggende bewerking noteren als een kale som, bijvoorbeeld op basis van signaalwoorden als ‘meer’ of ‘minder’.[180] Besteed daarom altijd aandacht aan de (fase van de) betekenisverlening. Ook moeten leerlingen ervaren hoe belangrijk het is om te reflecteren op het antwoord. Als hun gevonden antwoord onrealistisch is, hebben leerlingen dat vaak niet in de gaten.[181] Contextopgaven in de reken-wiskundemethodes zijn soms gekunsteld en niet levensecht.[182] Dit helpt niet om betekenis te verlenen aan de context of te reflecteren op het gevonden antwoord.

Contextopgaven kunnen een hulp of hindernis zijn.[183] Soms kan de realistische situatie steun bieden als leerlingen de formele procedures nog niet beheersen. Ze kunnen dan bijvoorbeeld wel berekenen hoeveel krentenbollen in drie zakjes met vier krentenbollen zitten, terwijl de opgave 3 × 4 nog te moeilijk is. Maar talige contextopgaven kunnen ook lastig zijn, met name voor leerlingen met een lage taalvaardigheid.[184,185] Als leerlingen worstelen met een contextopgave, kijk dan goed waar het misgaat. Begrijpen ze de tekst niet, herkennen ze de rekenbewerking(en) niet of is er iets anders aan de hand? Door leerlingen te laten vertellen hoe ze een opgave interpreteren en aanpakken, wordt het knelpunt vaak snel duidelijk. Zo kun je gericht ingrijpen.

Non-routineopgaven

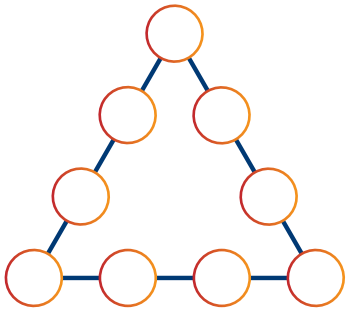
Naast routineopgaven bestaan ook non-routineopgaven: opgaven waar leerlingen (nog) geen kant-en-klare aanpak voor hebben, ook wel wiskundige problemen genoemd.[186] Non-routineopgaven kunnen naar een situatie in de werkelijkheid verwijzen of naar wiskundige situaties zoals in wiskundige puzzels en hersenkrakers. Vaak zijn meerdere oplossingsmanieren mogelijk en

soms ook meerdere goede antwoorden.[187] Figuur 7 geeft een aantal voorbeelden van non-routineopgaven.

Ook jongere leerlingen moeten ervaring opdoen met probleemoplossen. Het voorbeeld met de potloden (hieronder in figuur 7) laat zien dat er ook voor hen geschikte non-routineopgaven bestaan. Sommige non-routineopgaven kunnen op den duur routine worden, omdat leerlingen de oplossingsmanier geleerd hebben.

Figuur 7. Voorbeelden van non-routineopgaven

Zet de getallen van 1 tot en met 9 in de rondjes van deze driehoek. Zorg ervoor dat de som van de getallen in elke rij 17 is.



Hoeveel potloden heeft ieder?

Hoeveel emmers muurverf moeten we kopen om alle muren van onze klas te verven? Probeer dit zo goed mogelijk in te schatten.

Deel een getallenlijn van 1 tot en met 20 in twee stukken. Zorg ervoor dat de som van de getallen van het ene stuk even groot is als de som van de getallen van het andere stuk. Waar moet je de getallenlijn doorknippen?

Verdeel deze figuur in vier gelijke stukken die allemaal even groot zijn én dezelfde vorm hebben.

Pim gebruikt 8 magneten om 3 dierenplaatjes op te hangen. Hoeveel magneten gebruikt hij voor 30 plaatjes?

Het is belangrijk dat leerlingen leren hoe ze non-routine-opgaven kunnen aanpakken, omdat ze zich op school en daarbuiten moeten kunnen redden in allerlei nieuwe wiskundige situaties.[188,189,190] Ze moeten de wiskunde in de wereld herkennen, er op een eigen manier mee omgaan en niet terugdeinzen voor onbekende problemen. Daarom is het belangrijk dat ze in de reken-wiskundeles regelmatig non-routineopgaven tegenkomen. Ga minstens één keer per week met de hele klas aan de slag met een reken-wiskundig probleem.

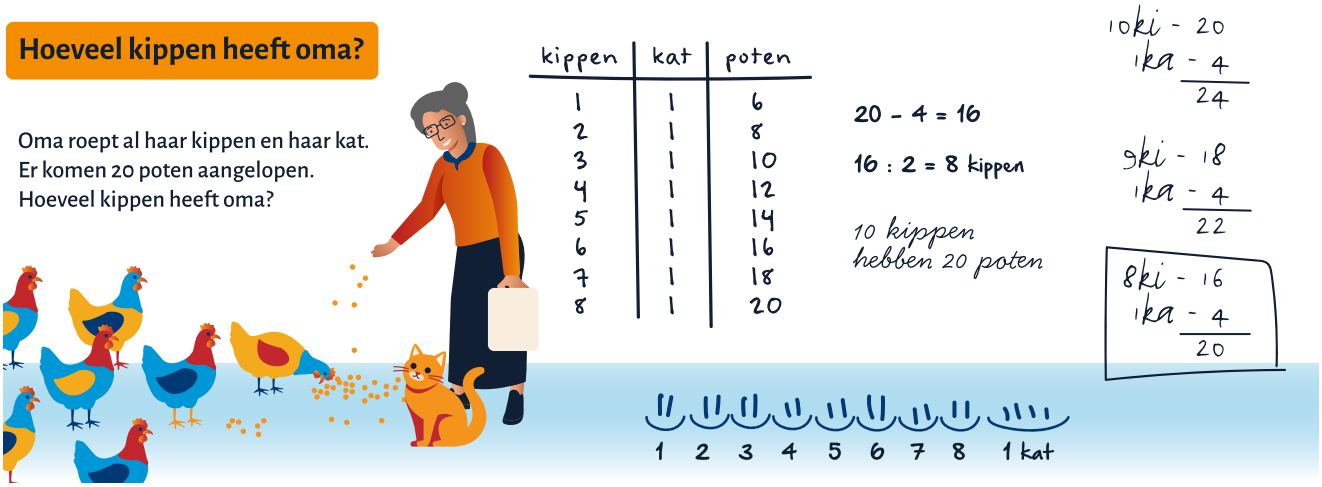
In de reken-wiskundemethodes komen weinig non-routineopgaven voor. Ze staan bovendien vooral in materialen voor leerlingen die meer aankunnen.[191,192] Als leerkracht zul je dus voorlopig nog zelf op zoek moeten gaan, bijvoorbeeld op de website van de Kangoeroewedstrijd: *www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe*.

Wiskundig probleemoplossen is ook belangrijk voor leerlingen die moeite hebben met rekenen-wiskunde.[193] Ook zij moeten zich kunnen redden met wiskundige problemen in de werkelijkheid. Verrassend genoeg blijkt dat leerlingen die moeite hebben met routine-opgaven soms juist goed uit de hoek komen bij wiskundig probleemoplossen.[194] Als je leerlingen via een zelfbedachte aanpak aan een wiskundig probleem laat werken, kan dat bijdragen aan hun zelfvertrouwen en hun plezier in rekenen-wiskunde. Dat kan vervolgens weer zorgen voor betere reken-wiskundige vaardigheden.[195,196]

Om het probleemoplossend vermogen bij alle leerlingen te ontwikkelen, zijn geschikte problemen op het juiste niveau nodig. De leerlingen hebben geen oplossingsmanier paraat, maar moeten wel genoeg voorkennis hebben om aan het probleem te kunnen werken, op hun eigen manier. Zogenoemde *low-floor-high-ceiling*-problemen (zie figuur 8) geven alle leerlingen de kans om (een begin van) een oplossingsmanier te vormen. Na afloop kunnen ze allemaal meedoen aan de gezamenlijke reflectie, aanpakken vergelijken en vaardigheden als redeneren en kritisch denken inzetten en ontwikkelen.[197] Leerlingen die hier nog niet aan toe zijn, kunnen tijdens de reflectie hun basisbegrip ontwikkelen.[198] Laat alle leerlingen ervaren dat het bij probleemoplossen om het goede antwoord gaat, maar vooral ook om de oplossingsmanier en hoe je die kunt presenteren en onderbouwen.

Tot nu toe is probleemoplossen besproken als doel van het reken-wiskundeonderwijs. Maar het kan ook als middel worden ingezet om leerlingen wiskundige procedures en concepten te laten ontdekken. Rekenen-wiskunde leren door een probleem op te lossen werkt motiverend en leerlingen onthouden beter wat ze zelf ontdekt hebben.[199,200] Leerlingen moeten hierbij wel voldoende voorkennis hebben, anders kan het leren door probleemoplossen tot cognitieve overbelasting leiden. Gerichte begeleiding door de leerkracht is essentieel om leerlingen op het juiste spoor te houden.[201]

Figuur 8. Een voorbeeld van een low-floor-high-ceiling-probleem met oplossingsmanieren van leerlingen op verschillende niveaus. Hier is te zien dat leerlingen op hun eigen manier aan het probleem hebben gewerkt. De oplossingsmanieren zijn goed met elkaar te verbinden en te vergelijken.



4.2 Ondersteun en stimuleer leerlingen in alle fasen van probleemoplossen

Als leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen doorlopen ze drie fasen:

1. het probleem begrijpen
2. een aanpak bedenken en uitvoeren
3. uitwisselen van en reflecteren op de oplossingsmanieren en het oplossingsproces

Deze fasen zijn vergelijkbaar met het drieslagmodel,[202] maar ze zijn algemener omdat bij non-routineopgaven weergave in een formele bewerking meestal niet mogelijk is. Het kader *Lesactiviteit gericht op probleemoplossen* beschrijft een stappenplan, zie hieronder.

Lesactiviteit gericht op probleemoplossen

Je kunt de volgende stappen doorlopen bij een les over probleemoplossen.[203]

Stap 1: verhelder het probleem
Presenteer het probleem en zorg dat alle leerlingen het probleem begrijpen door een korte, interactieve bespreking te houden. Stel vragen. Laat leerlingen belangrijke woorden en getallen markeren en het probleem in eigen woorden weergeven.[204] Voorkom dat leerlingen op dit moment al oplossingsmanieren noemen. Verhelder het probleem zonder het denkwerk weg te nemen.[205]

Stap 2: zet leerlingen aan het werk
Laat leerlingen individueel of in tweetallen aan het probleem werken. Ze mogen zelf weten hoe ze het probleem aanpakken. De oplossingsmanier is net zo belangrijk als het goede antwoord. Benadruk dat ze hun oplossingsmanier duidelijk en volledig op papier moeten zetten. Loop rond en kijk of je de oplossingsmanieren van de leerlingen kunt volgen. Selecteer twee of drie oplossingsmanieren waar medeleerlingen iets van kunnen leren en die geschikt zijn voor de klassikale nabespreking.[206,207]

Geef leerlingen die vastlopen hulp, zodat ze niet gefrustreerd raken. Geef een hint of vraag ze of ze twee dingen kunnen opschrijven die ze al weten over het probleem en één ding dat ze nog zouden willen weten.[208] Alle leerlingen kunnen vervolgens zinvol meedoen aan de klassikale nabespreking.

Stap 3: bespreek klassikaal na
Laat twee of drie leerlingen hun oplossingsmanier presenteren. Doe dit in een doordachte volgorde. Maak aantekeningen op het bord of laat de leerling dat doen. Zorg dat de oplossingsmanier voor iedereen helder is. Laat leerlingen vragen stellen aan elkaar over de gepresenteerde oplossingsmanier.[209]

Blik terug op de oplossingsmanieren en het oplossingsproces.[210] Zoek samen naar overeenkomsten en verschillen tussen de oplossingsmanieren.[211,212] Noem of bevestig het goede antwoord, maar maak je leerlingen ervan bewust dat het daar in de eerste plaats niet om gaat.[213] Reflecteer op het oplossingsproces: hoe hebben leerlingen aan het probleem gewerkt en wat vinden ze daarvan? Stel gezamenlijk vast wat je leerlingen hebben geleerd over probleemoplossen.

Het is belangrijk om je leerlingen te begeleiden bij deze drie fasen van probleemoplossen zonder het denkwerk bij ze weg te nemen. [214,215] Als leerkracht kun je geneigd zijn om leerlingen die niet weten wat ze moeten doen onmiddellijk te helpen, bijvoorbeeld door leerlingen stap-voor-stap te begeleiden. Hoe goed bedoeld ook, dit ondermijnt het denkwerk van de leerlingen en weerhoudt hen ervan betekenis te geven aan de wiskunde.[216] Dan blijft alleen de toepassing van een specifieke procedure over en daar gaat het bij probleemoplossen niet om. Probeer leerlingen met een hint op weg te helpen, maar voorkom dat je het probleem te veel versimpelt.[217] Leer je leerlingen dat moeilijkheden en onzekerheden nou eenmaal bij probleemoplossen horen en geef complimenten als ze doorzetten.[218]

4.3 Begeleid leerlingen als ze verschillende aanpakken vergelijken, verwoorden, verdedigen en bespreken

Blik samen met je leerlingen terug op het probleem waaraan ze hebben gewerkt, ongeacht of ze een antwoord hebben gevonden of niet. Bespreek hun oplossingsmanieren en het oplossingsproces. Leerlingen moeten de kans krijgen hun wiskundige ideeën te verwoorden, te onderbouwen en te verdedigen. Daag ze uit om te redeneren volgens hun eigen of andermans wiskundige verklaringen. Daarmee gaan ze het probleem vanuit een ander perspectief zien en ontwikkelen ze een dieper begrip.[219] Dit bevordert een wiskundige attitude waarmee ze met plezier en zelfvertrouwen aan een onbekend reken-wiskundig probleem durven te beginnen: “Ook al weet je niet meteen hoe het moet, je kunt altijd iets proberen.”

Laat leerlingen ervaren dat er meestal verschillende manieren zijn om het probleem aan te pakken en daag ze in de gezamenlijke terugblik uit die manieren met elkaar te verbinden. Wat zijn overeenkomsten en verschillen tussen de oplossingsmanieren?[220,221] Laat leerlingen ook ervaren dat er verschillende manieren zijn om problemen weer te geven. Dat kan natuurlijk in woorden, maar een tekening, schema of model biedt soms meer steun en structuur.

Soms is het zinvol om als leerkracht tijdens het klassikale gesprek een eigen – goede of foute – oplossingsmanier in te brengen om de leerlingen daarover te laten nadenken: “Ik zag een keer een leerling en die deed het op deze manier … Wat vinden jullie daarvan?” Probeer wel te voorkomen dat leerlingen zonder kritisch na te denken de oplossingsmanier van de leerkracht overnemen. Geef ze genoeg autonomie en zelfvertrouwen om voor eigen manieren te kiezen.[222]

Tot slot is het belangrijk om niet alleen terug te blikken op de oplossingsmanieren, maar ook het proces van probleemoplossen met je leerlingen te evalueren. Hoe heb je aan het probleem gewerkt? Was de eerste aanpak meteen succesvol of ben je halverwege overgestapt op een andere aanpak? Wat zou je een volgende keer doen als je weer zo’n puzzel moet oplossen?

Een klassikaal gesprek over het proces van probleemoplossen begeleiden stelt hoge eisen aan de leerkracht en de leerlingen.[223,224] Het gesprek moet een respectvolle en veilige uitwisseling zijn van kennis en ideeën, waaraan elke leerling actief kan deelnemen.[225] Zorg voor betrokkenheid en duidelijke gespreksregels.[226] Leerlingen moeten weten wat van hen wordt verwacht en wat ze van het gesprek kunnen leren.[227] Voorkom dat klassikale gesprekken ontaarden in eindeloze sessies, waarbij leerlingen allemaal willen laten zien wat ze hebben gedaan.[228]

4.4 Laat leerlingen ervaring opdoen met algemene aanpakken om reken-wiskundige problemen op te lossen

Om reken-wiskundige problemen op te lossen kun je verschillende algemene aanpakken gebruiken. Zulke aanpakken worden heuristieken genoemd. Denk bijvoorbeeld aan beredeneerd gokken, een schematische tekening van de probleemsituatie maken (modelleren), het probleem vereenvoudigen of kleiner maken, het probleem met getallen en symbolen weergeven of naspelen met materiaal, of het probleem opsplitsen in deelproblemen.[229] Heuristieken kunnen leerlingen helpen flexibel om te gaan met onbekende probleem-

situaties.[230] Hiermee kunnen ze in ieder geval iets proberen, ook al is vooraf niet meteen duidelijk of dat goed uitpakt.

Door te reflecteren en herhaald de aandacht te vestigen op heuristieken, bouwen leerlingen een repertoire van deze aanpakken op. Je kunt dit bijvoorbeeld doen door in de gezamenlijke nabespreking doelbewust het oplossingsproces en de gebruikte aanpakken te bespreken. Vooral voor leerlingen in de bovenbouw kan dit effectief zijn.[231,232]

Een belangrijke aanpak om problemen op te lossen is een schematische tekening maken die de structuur van het probleem of de gebruikte oplossingsmanier visualiseert.[233,234] Het maken van schematische tekeningen is een vorm van wiskundig modelleren. Ze helpen om de denkstappen te ordenen. Ook bij de gezamenlijke uitwisseling van en reflectie op oplossingsmanieren kunnen ze een belangrijke rol spelen.[235,236] Leerlingen moeten leren hoe ze zo'n schematische, modelmatige weergave van een wiskundige situatie maken. Welke details laat je weg en hoe kun je de wiskundige structuur duidelijk en correct weergeven?[237] Als leerkracht kun je voordoen hoe je zo'n schematische tekening maakt en je overwegingen bespreken.

Om reken-wiskundige problemen op te lossen gebruiken leerlingen metacognitieve vaardigheden. Ze plannen, monitoren, reflecteren en reguleren hun eigen denken en handelen. Stimuleer je leerlingen om hardop te denken en zichzelf vragen te stellen als ze zelfstandig werken aan een probleem. Dit kun je als leerkracht voordoen.

4.5 Zorg voor een doordachte voorbereiding

Een lesactiviteit gericht op de ontwikkeling van probleemoplossend vermogen, moet je goed voorbereiden (zie kader *Lesactiviteit gericht op probleemoplossen*, pagina 35). Bedenk van tevoren met welke correcte en foute oplossingsmanieren leerlingen het probleem zouden kunnen aanpakken.[238] Verplaats je in de leerlingen, bedenk waar ze tegenaan kunnen lopen en hoe je daarop wilt reageren. Zo komt je focus meer op het denken van de leerlingen te liggen dan wanneer je alleen de leerkrachthandleiding van een methode volgt.[239] Bedenk hints voor leerlingen die vastlopen: hoe kun je hen helpen zonder het denkwerk weg te nemen?[240,241]

Denk vooraf ook na over verdiepingsvragen, want het is lastig om die tijdens de les te bedenken.[242] Verdiepingsvragen laten leerlingen die snel klaar zijn vanuit een nieuw perspectief over het probleem en de aanpak nadenken.[243] Enkele voorbeelden:

- Probleem: "Dagmar schrijft het getal 5021972970 op een blaadje. Ze knipt het getal op 2 plekken door, zodat ze 3 getallen krijgt. Die telt ze bij elkaar op. Op welke plekken moet Dagmar het getal doorknippen om de kleinst mogelijke uitkomst te krijgen?"
  - Verdiepingsvraag: "Kun je uitleggen waarom dat echt de kleinst mogelijke uitkomst is?"

- Probleem: "Je gebruikt 6 munten om 2 euro te betalen. Op welke verschillende manieren kun je dat doen?"
  - Verdiepingsvraag: "Hoe weet je zeker dat je alle mogelijkheden gevonden hebt?"

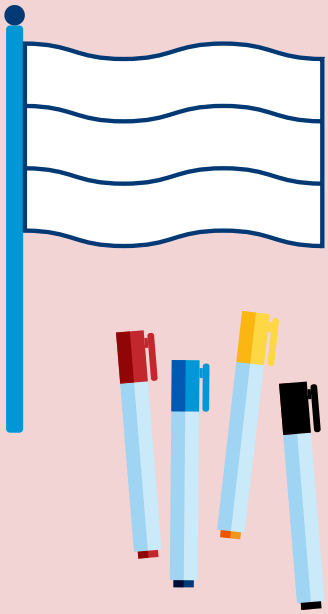
Het is dus nuttig om een les gericht op probleemoplossen voor te bereiden. Maar wees flexibel genoeg om daar weer van af te wijken en aan te sluiten bij waar de kinderen mee komen.[244,245] Het kader *Samen met leerlingen probleemoplossen*, zie pagina 38, geeft daarvan een praktijkvoorbeeld.

Een uitwerking van een lesvoorbereiding vind je bij 'handvatten' op *www.onderwijskennis.nl/leidraad/rekenen-wiskunde-3-8*

Samen met leerlingen probleemoplossen

Een leerkracht uit groep 8 gaat met het volgende probleem aan de slag:

Hoeveel verschillende vlaggen kun je kleuren?



In haar voorbereiding verwacht ze dat veel leerlingen oplossingen gaan kleuren, dat enkele leerlingen met de letters b, r, g en z combinaties gaan maken, en dat een enkeling met de formele oplossing 4 × 4 × 4 = 64 komt.

In de praktijk blijkt echter een flink deel van de klas te gaan optellen: 4 + 4 + 4 = 12. Maar de leerlingen die vlaggen gekleurd hebben komen op veel meer combinaties, dus 12 kan niet goed zijn. De optelaanpak lijkt niet correct. Maar waarom niet? En hoe moet het dan wél?

Eén leerling is begonnen met een boomdiagram. De leerkracht pakt dit idee op en zet samen met de leerlingen een boomdiagram op het bord.
Het totale aantal van 64 combinaties wordt zichtbaar en enkele leerlingen herkennen de vermenigvuldiging 4 × 4 × 4. Zo sluit de leerkracht aan bij foute en goede aanpakken van haar leerlingen.

Probleemoplossen bevorderen

Om wiskundig probleemoplossen bij leerlingen te bevorderen is het belangrijk dat leerlingen hun oplossingsproces monitoren en erop reflecteren. De begeleiding van de leerkrachten hierbij is essentieel. Daarvoor is sterk bewijs gevonden in onderzoeken naar de effectiviteit van verschillende didactische aanpakken voor wiskundig probleemoplossen.[246] Ook is er sterk bewijs dat het tot betere prestaties leidt als leerlingen leren om visuele representaties te maken (schematische tekeningen van relevante kenmerken van het probleem). Er is matig bewijs voor het aanbieden of aanmoedigen van verschillende aanpakken om een probleem op te lossen. Datzelfde geldt voor leerlingen helpen om reken-wiskundige concepten en notaties te herkennen en verwoorden. Tot slot blijkt er nauwelijks onderzoek te bestaan naar het aanbieden van geschikte problemen.

1. Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen.
2. Schakel tussen concreet, schematisch en abstract.
3. Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel.
4. Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen.
5. **Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude.**
6. Investeer als school in reken-wiskundeonderwijs.

5 Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude

Laat leerlingen ervaren dat rekenen-wiskunde nuttig, plezierig en haalbaar is. Bevorder hun enthousiasme en zelfvertrouwen met gezamenlijke, activerende werkvormen, toepassingsopgaven en succeservaringen. Geef als leerkracht het goede voorbeeld: denk hardop, laat zien dat rekenen-wiskunde uitdagend is en soms om doorzettingsvermogen vraagt. Maar ook dat je van je fouten leert door erop te reflecteren en dat het fijn is een probleem op te lossen. Zo ga je rekenen-wiskunde steeds beter begrijpen en beheersen.

5.1 Maak leerlingen enthousiast voor rekenen-wiskunde en stimuleer hun motivatie en betrokkenheid

Gemotiveerde, betrokken leerlingen doen beter hun best en presteren beter.[247,248] Motivatie en betrokkenheid dragen ook bij aan de ontwikkeling van een wiskundige attitude.[249] Als leerkracht kun je veel doen om leerlingen enthousiast, gemotiveerd en betrokken te maken.

Maak rekenen-wiskunde relevant en betekenisvol

Sluit aan bij de belevingswereld van je leerlingen.[250] Geef leerlingen regelmatig de kans om reken-wiskundige kennis toe te passen of te herkennen in de wereld om hen heen. Maak het doel van een activiteit duidelijk en betekenisvol, en evalueer na afloop met de leerlingen in hoeverre het doel is bereikt. Zorg dat ook de leerlingen die moeite hebben met rekenen-wiskunde regelmatig plezier en succes ervaren. Geef alle leerlingen de kans om te ontdekken hoe veelzijdig, uitdagend en interessant rekenen-wiskunde kan zijn, bijvoorbeeld door mee te doen aan de Grote Rekendag.

Activeer de leerlingen

Rekenen-wiskunde leren vereist veel oefening en herhaling. Geef activerende opdrachten en zorg voor afwisseling om leerlingen te motiveren. Zet bijvoorbeeld naast reproductieve ook productieve oefenvormen in, waarin leerlingen oefenen combineren met puzzelen. Geschikte reken-wiskundespellen zorgen dat leerlingen actief en betekenisvol oefenen. Geef iedere leerling de kans af en toe een reken-wiskundespel te spelen, en niet alleen de leerlingen die snel klaar zijn. Er zijn verschillende overzichten van reken-wiskundespellen te vinden met een beschrijving van leerinhouden en doelen, zoals *www.rondjerekenspel.nl*.[251]

Interactie met leerlingen, bijvoorbeeld door open vragen te stellen, zorgt ervoor dat alle leerlingen actief meedenken.[252,253] Betrek alle leerlingen bij klassikale gesprekken over rekenen-wiskunde door na een vraag voldoende denktijd te geven.[254] Geef een leerling pas de beurt als iedereen over de vraag heeft kunnen nadenken. Je kunt ook wisbordjes inzetten om alle leerlingen actief en betrokken te houden.

Laat leerlingen samenwerken

Bij coöperatieve werkvormen werken leerlingen samen. Dit kan motiverend zijn en bijdragen aan betere leerresultaten.[255] Bij de werkvorm *Flitsen* bijvoorbeeld kunnen leerlingen elkaar met vraag- en antwoordkaartjes overhoren. Bij *Denken, delen, uitwisselen* denken leerlingen twee minuten individueel na over een vraag of probleem, daarna overleggen ze in tweetallen en ten slotte worden de ideeën klassikaal uitgewisseld. Je kunt dit gebruiken om een probleem te verhelderen of om te reflecteren op een gepresenteerde oplossingsmanier. Samenwerking draagt ook bij aan verbondenheid en sociale relaties. Je hebt elkaar nodig om een doel te kunnen bereiken.

Wiskundige attitude

Er bestaat geen eenduidige definitie van een wiskundige attitude, maar over het algemeen gaat het om onderstaande kenmerken.

Leerlingen met een wiskundige attitude:

- beschouwen rekenen-wiskunde als zinvol, nuttig, waardevol en de moeite waard.[256] Ze zijn ervan overtuigd dat je het nodig hebt in het dagelijks leven en later in je beroep.
- zijn gericht op het herkennen, toepassen en kritisch onderzoeken van rekenen-wiskunde in de werkelijkheid.[257]
- beleven plezier aan rekenen-wiskunde. Ze zijn geïnteresseerd en nieuwsgierig.[258]
- hebben zelfvertrouwen. Ze geloven dat ze rekenen-wiskunde kunnen (leren) en bezitten wiskundige *self-efficacy*.[259]
- tonen doorzettingsvermogen en inzet bij rekenen-wiskunde.[260]
- sturen hun denken en handelen tijdens rekenen-wiskunde.[261,262] En ze reflecteren op eigen en andermans wiskundig denken en handelen.[263]

Observeer je leerlingen als ze samenwerken, puzzelen, uitleg geven, een spel spelen of op een andere manier actief met rekenen-wiskunde aan de slag gaan. Zijn ze betrokken, nemen ze initiatief, komen ze met eigen ideeën, luisteren ze naar ideeën van anderen, hebben ze plezier? Dit geeft informatie over hun reken-wiskundige ontwikkeling – inclusief hun wiskundige attitude – die je niet uit gewone toetsen kunt afleiden. Leg ook deze informatie over je leerlingen vast.

5.2 Stimuleer zelfvertrouwen en voorkom rekenangst

Het zelfvertrouwen van leerlingen speelt een grote rol in hun motivatie en bij de ontwikkeling van een wiskundige attitude. Hoe groter het vertrouwen van leerlingen in hun eigen reken-wiskundevaardigheden, des te meer ze leren, ongeacht hun startniveau, zie ook kader *Zelfvertrouwen en prestaties* op pagina 42.[264] Als leerkracht kun je het zelfvertrouwen en zelfbeeld van je leerlingen stimuleren door succeservaringen te creëren en (te veel) faalervaringen te voorkomen. Dit vraagt om een passend aanbod. Als je differentieert naar niveau, zorg dan dat je flexibel groepeert. Zo voorkom je dat leerlingen die (altijd) in de laagste niveaugroep zitten een laag zelfbeeld ontwikkelen.[265]

Je kunt ook differentiëren door rekenopdrachten aan te bieden die leerlingen op verschillende niveaus en manieren kunnen oplossen. Geef ze hierbij de ruimte om de opdracht op hun eigen manier aan te pakken, wat hun autonomie bevordert. Je kunt ook variëren door gesloten, feitelijke vragen (Wat is de uitkomst van 6 × 8?) af te wisselen met meer open vragen, die denken en redeneren uitlokken (Welke berekeningen hebben 36 als uitkomst en hoeveel mogelijkheden zijn er?).[266]

Leerlingen die veelvuldig negatieve ervaringen hebben met rekenen-wiskunde zullen minder geneigd zijn zich in te zetten voor reken-wiskundetaken, omdat ze denken dat de gestelde doelen onbereikbaar zijn. Dit kan leiden tot zorgen en angstgevoelens.[267] Rekenangst is desastreus voor de leeropbrengsten. Er lijkt sprake van een vicieuze cirkel: rekenangst zorgt voor vermijding van reken-wiskundetaken en een overbelasting van het werkgeheugen, waardoor de ontwikkeling achterblijft. Leerlingen zijn meer bezig met bange gedachten dan dat ze geconcentreerd werken. Ze zijn langzamer en maken meer fouten, vooral bij opgaven waar ze getallen moeten onthouden en bewerken. Leerlingen met rekenangst worden dus letterlijk in beslag genomen door hun zorgen. Dat zorgt vervolgens weer voor minder zelfvertrouwen en meer rekenangst. Meisjes hebben gemiddeld meer rekenangst dan jongens, terwijl ze op hetzelfde niveau presteren.[268]

Rekenangst komt bij jonge kinderen nog nauwelijks voor. Leerkrachten moeten er dus voor zorgen dat leerlingen geen rekenangst ontwikkelen als ze ouder worden. Grijp snel in en probeer het patroon te doorbreken.[269]

Meer informatie over omgaan met reken(faal)angst vind je op *www.onderwijskennis.nl/kennisbank/omgaan-met-rekenfaalangst*

Zorg dat je een positief rolmodel bent: laat zien dat iedereen de basis van het rekenen onder de knie kan krijgen door te oefenen en te puzzelen. Straal uit dat rekenen niet iets is om bang voor te zijn en dat iedereen weleens een fout maakt. Hoe vaker leerlingen met rekenangst ervaren dat ze iets wél kunnen en dat ze vooruitgaan, des te beter. Laat leerlingen actief meedoen en geef ze autonomie bij wat en hoe ze leren.[270,271]

Door faalervaringen te beperken, stimuleer je het zelfvertrouwen en kun je rekenangst voorkomen of bestrijden.[272] Hiervoor is het belangrijk dat leerlingen de rekenfeiten en procedures voldoende beheersen. Leer hun ook wat ze kunnen doen als ze geautomatiseerde of gememoriseerde kennis zijn vergeten. Hoe kun je bijvoorbeeld 6 × 7 uitrekenen als je de uitkomst niet meer paraat hebt?

Als leerlingen gefrustreerd raken, moet je als leerkracht steun bieden. Geef in eerste instantie niet meer dan een hint en neem niet al het denkwerk weg. Leerlingen moeten af en toe ook ervaren dat worstelen erbij hoort. Niemand leert vanzelf rekenen, je leert juist van fouten maken en de feedback die je daarop krijgt. Leerlingen en leerkrachten met een *growth mindset* hebben de

overtuiging dat iedereen beter kan worden in rekenen-wiskunde, ook al gaat dat met vallen en opstaan.[273] Een *growth mindset* biedt bescherming tegen de negatieve gevolgen van faalervaringen.[274]

Leerlingen die de kans krijgen om te puzzelen en te onderzoeken verwerven dieper begrip van rekenen-wiskunde en ervaren dat het om meer gaat dan opgaven correct oplossen.[275] Dit vergroot hun gevoel van zelfvertrouwen. Geef leerlingen complimenten als ze zich inzetten én doorzetten bij redeneren en betekenis geven aan rekenen-wiskunde.[276] Toon waardering als ze verschillende oplossingsmanieren uitproberen of vergelijken, als ze vragen stellen over specifieke aspecten van de opdracht of als ze proberen heel precies te zijn in hun verklaringen en het gebruik van reken-wiskundetaal. Zoek hierbij de juiste balans tussen ondersteunen en uitdagen.[277]

Zelfvertrouwen en prestaties

Goede prestaties en zelfvertrouwen gaan samen bij rekenen-wiskunde. Ook bij Nederlandse leerlingen uit groep 6 en 8 werd een sterke samenhang gevonden, blijkt uit de peilingsonderzoeken TIMSS en Peil.rekenen-wiskunde in groep 8.[278] Leerlingen die meer zelfvertrouwen hebben, hebben bovendien meer plezier in rekenen-wiskunde. Opvallend is verder dat jongens bij gelijke prestaties meer zelfvertrouwen hebben dan meisjes.

De grote vraag is natuurlijk: zorgen betere prestaties voor meer zelfvertrouwen of leidt een hoger zelfvertrouwen tot betere prestaties? Of is het allebei waar? Prast en collega's[279] analyseerden de reken-wiskundeprestaties op leerlingvolgsysteemtoetsen van ruim vierduizend Nederlandse basisschoolleerlingen uit groep 4-8. Voor elke leerling hadden ze twee meetmomenten: één aan het einde van het schooljaar en één medio het volgende schooljaar. Tussendoor werd de leerlingen gevraagd naar hun motivatie voor rekenen-wiskunde: zelfvertrouwen, nut van rekenen-wiskunde en rekenangst.

Het onderzoek laat zien dat goede prestaties niet alleen zorgen voor zelfvertrouwen, maar dat zelfvertrouwen vervolgens ook een positieve invloed heeft op de prestaties. Leerlingen met hogere prestaties hadden op het eerste meetmoment meer zelfvertrouwen, schatten het nut van rekenen-wiskunde hoger in en hadden minder rekenangst. Bij het tweede meetmoment bleek dat alleen zelfvertrouwen samenhing met groei in prestaties. Rekenangst en oordeel over het nut speelden geen rol. Dit bleek bovendien te gelden voor leerlingen van alle prestatieniveaus. Het zelfvertrouwen van leerlingen stimuleren kan dus helpen om beter te presteren.

5.3 Begeleid leerlingen bij de ontwikkeling van metacognitieve vaardigheden

Metacognitie is te definiëren als 'denken over denken' of 'leren hoe je kunt leren'.[280,281] In de reken-wiskundeles betekent dit dat leerlingen hun denken en handelen kunnen plannen, monitoren en evalueren, en dat ze hun aanpak kunnen controleren en bijsturen.[282] Als ze werken aan een opgave, stellen ze zich vragen als: wat probeer ik uit te werken? Hoe ver ben ik daar nu mee? Heb ik een geschikte aanpak gekozen? Wat kan ik nog meer proberen? Is het probleem nu opgelost? Zou dit antwoord kunnen kloppen? Na afloop blikken ze terug op hun aanpak en kunnen ze deze evalueren: hoe ben ik begonnen? Ben ik overgestapt op een andere aanpak? Waarom? Was dat handig? Wat zou ik een volgende keer anders doen?[283,284] Dit is niet alleen relevant tijdens het oplossen van reken-wiskundige problemen, maar bij alle onderdelen van rekenen-wiskunde. Leerlingen die zich een reflectieve houding aanwennen, versterken hun wiskundige attitude.

Leerkrachten kunnen de ontwikkeling van metacognitieve vaardigheden bij leerlingen bevorderen door de vaardigheden voor te doen. Bijvoorbeeld door bij de uitwerking van een opgave hardop te denken:[285] waar gaat het om bij deze opgave? Hoe kan ik het probleem in mijn eigen woorden weergeven? Heb ik alle benodigde gegevens of moet ik aanvullende informatie schatten of opzoeken? Kan ik het probleem tekenen? Kan ik het met een getallenlijn, schema of verhoudingstabel presenteren? Zou het antwoord kunnen kloppen? Hoe kan ik dat controleren?

Leerlingen kunnen hun metacognitieve vaardigheden ontwikkelen door oplossingsmanieren van anderen (de leerkracht, medeleerlingen) te bestuderen, begrijpen en evalueren. Deze oplossingen kunnen correct zijn of juist fouten of misconcepties bevatten. Ze kunnen volledig zijn of niet. Vraag leerlingen de stappen in de uitgewerkte voorbeelden te verklaren, te beoordelen en eventueel aan te vullen of te verbeteren.[286] Door deze analyse, bespreking en vergelijking van uitgewerkte voorbeelden begrijpen leerlingen oplossingsmanieren en onderliggende concepten beter én ontwikkelen ze hun metacognitieve vaardigheden.

5.4 Leer leerlingen rekenen-wiskunde in de werkelijkheid te herkennen en gebruiken

Door in je reken-wiskundeonderwijs situaties uit de werkelijkheid te gebruiken laat je je leerlingen ervaren dat rekenen-wiskunde nuttig en belangrijk is, en maak je rekenen-wiskunde betekenisvol.[287] Stimuleer leerlingen om met een wiskundige bril naar de wereld om hen heen te kijken, zodat ze de wiskunde herkennen en er vaardig en kritisch mee omgaan. Dat vormt ook een belangrijk aspect van een wiskundige attitude. Contextopgaven in lesmethodes zijn meestal niet levensecht. Zorg daarom zelf voor opgaven uit de belevingswereld van de leerlingen. Laat ze bijvoorbeeld informatie schattend aanvullen op basis van hun kennis van de werkelijkheid: Hoeveel water bespaar ik als ik een jaar lang twee minuten korter douch? De schoolfotograaf komt langs om alle leerlingen op de foto te zetten, hoeveel tijd heeft hij daarvoor nodig? Wat is de kortste en wat de snelste weg naar oma? Kan ons voetbalelftal nog kampioen worden?

Leerlingen kunnen van levensechte opgaven onder andere leren dat in de werkelijkheid soms meerdere antwoorden juist kunnen zijn of dat het goede antwoord niet exact te bepalen is. Als dat laatste het geval is, kun je nog wel je oplossingsmanier evalueren. Ook kun je onderzoeken of je gevonden antwoord realistisch is in de gegeven situatie.

Stimuleer een onderzoekende en kritische houding

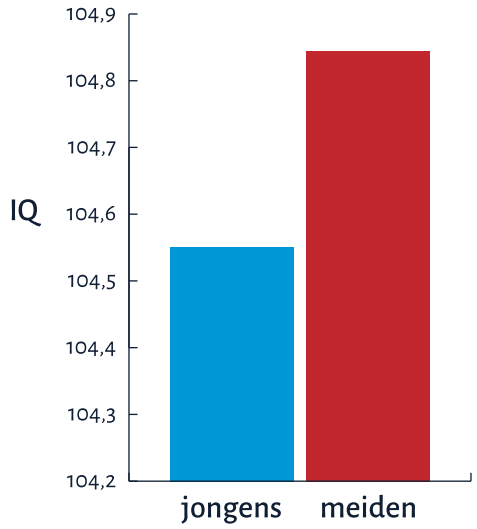
In de alledaagse werkelijkheid worden leerlingen via allerlei media geconfronteerd met kwantitatieve en wiskundige informatie, waaraan ze betekenis moeten kunnen geven. Je wilt bijvoorbeeld van de grafiek van Buienradar kunnen aflezen wanneer het gaat regenen. Of met de reisplanner vaststellen welke trein je het beste kunt nemen.

Informatie uit nieuws- en sociale media blijkt steeds vaker – bedoeld of onbedoeld – niet te kloppen of misleidend te zijn.[288] Dit vereist een kritische en onderzoekende houding. Kan het kloppen wat hier staat? Hoe kan ik daar achter komen? Leerlingen kunnen dit oefenen met geschikte mediaberichten, zoals: "*De Schot*

Mark Beaumont fietste de wereld rond in 80 dagen."
Wat vind je van dit bericht?

Ook informatie in de vorm van diagrammen en grafieken wordt soms onjuist of misleidend gepresenteerd. Leerlingen moeten hierop bedacht zijn en kritische vragen leren stellen,[289] zie het volgende voorbeeld.

Figuur 9. In deze grafiek lijkt het alsof meiden twee keer zo slim zijn als jongens. Waardoor word je op het verkeerde been gezet?



Sommige leerlingen beseffen niet dat media-informatie onjuist of misleidend kan zijn. Bewustwording is de eerste stap op weg naar kritisch wiskundig denken.[290] Geef leerlingen daarom veel gelegenheid om zelf na te denken in de les. Als leerkracht vertel je niet hoe het zit, maar help je leerlingen om zelf na te gaan of getalsmatige informatie, een representatie of een redenering wel of niet kan kloppen. Laat ze hun bevindingen onderbouwen en uitwisselen.

Kritisch denken is een belangrijk aspect van een wiskundige attitude. Maar dit is uiteraard niet voorbehouden aan de reken-wiskundeles alleen. Ook bij taal, burgerschap en digitale geletterdheid is de ontwikkeling van kritisch denken belangrijk.[291] Het kader *Kritisch denken stimuleren*, zie pagina 45, laat zien hoe je hier als leerkracht aan kunt werken.

5.5 Wees je bewust van je voorbeeldfunctie als leerkracht

Als leerkracht heb je een voorbeeldfunctie bij de ontwikkeling van motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude bij je leerlingen. De schoolleiding en de hele staf, inclusief het niet-onderwijzend personeel, kunnen het vertrouwen en plezier in wiskunde aanmoedigen en voorleven bij elke gelegenheid die zich voordoet.[292] Denk aan het vieren van een verjaardag in groep 1 tot betrokkenheid bij de herinrichting van het schoolplein in groep 8.

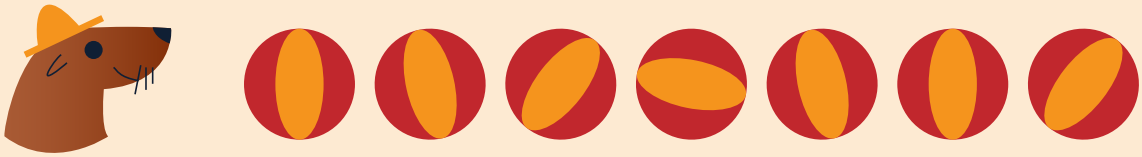
Straal als team uit dat rekenen-wiskunde overal nodig is, handig kan zijn, en dat iedereen de basis onder de knie kan krijgen door te oefenen en te puzzelen.[293] Werk vanuit een *growth mindset*: benadruk dat iedereen beter kan worden in rekenen-wiskunde, als je het maar probeert.[294] Je kunt dit voorleven door te laten zien dat je zelf ook weleens een fout maakt of dat je soms tijd nodig hebt om iets te begrijpen.[295] Vermijd opmerkingen als: "Deze les is erg moeilijk" of "Nu komt een lastig onderdeel". Laat zien dat rekenen een alledaagse activiteit is waaraan je veel plezier kunt beleven, ook als het moeilijk is.

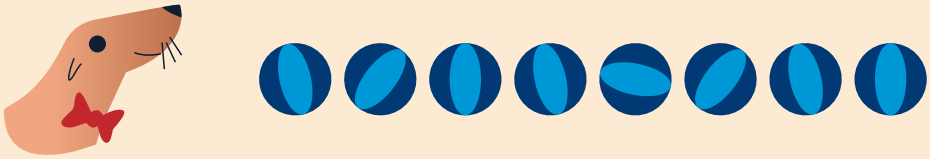
Kritisch denken stimuleren

Jonge kinderen ontwikkelen al kritisch denkvermogen.
Dit kun je stimuleren door bijvoorbeeld de volgende vraag te stellen:

Figuur 10. Werkblad voor groep 3[296]

Wie heeft de meeste ballen?

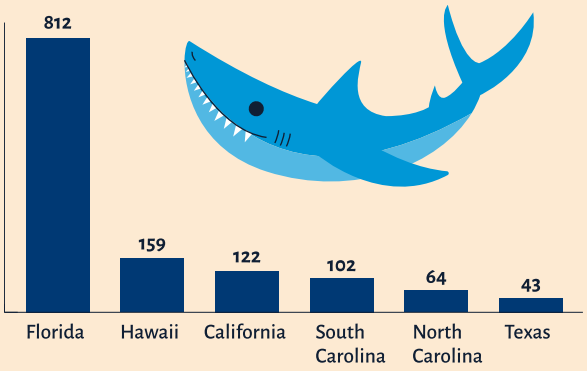
A 

B 

Ik denk _____ want _____

Figuur 11. Werkblad voor groep 7[297]

In welke staat zou jij liever niet de zee in duiken? Leg uit waarom.



Aantal aanvallen door haaien per staat sinds 1837

Laat leerlingen ervaren dat ze informatie in een nieuwsbron moeten toetsen aan hun kennis over de werkelijkheid of aan informatie in andere media. Bij de vraag hiernaast laat je bijvoorbeeld zien dat je pas iets kunt concluderen over het risico dat je in een bepaalde staat loopt om door een haai te worden aangevallen, als je weet hoe lang de kustlijnen van de verschillende staten zijn. Daarnaast weet je niet hoe die aanvallen verspreid zijn over de tijd sinds 1837. Voor je eigen veiligheid kun je beter een overzicht van de aanvallen in het afgelopen jaar gebruiken.

1. Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen.
2. Schakel tussen concreet, schematisch en abstract.
3. Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel.
4. Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen.
5. Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude.
6. **Investeer als school in reken-wiskundeonderwijs.**

6 Investeer als school in reken-wiskundeonderwijs

Als leerkracht kun je het verschil maken, maar samen met collega's kun je nog veel meer bereiken. Belangrijke factoren voor reken-wiskundeonderwijs van hoge kwaliteit zijn een gedeeld en gedragen reken-wiskundebeleid, een rekencoördinator met tijd en ruimte, de bevordering van samenwerking en professionalisering, en een schoolcultuur van hoge verwachtingen.

Deze aanbeveling sluit aan bij de informatie in de leidraad *Werken aan onderwijsverbetering in het primair onderwijs.*[298] Kijk op *www.onderwijskennis.nl/kennisbank/leidraad-werken-aan-onderwijsverbetering*

6.1 Werk als school voortdurend en doelgericht aan de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs

Scholen die het beste uit hun leerlingen halen op het gebied van rekenen-wiskunde, weten waar ze heen willen en hoe ze daar gezamenlijk kunnen komen.[299] Ze hebben een doordacht reken-wiskundebeleid dat door leerkrachten, ondersteuners en met name de schoolleiding wordt gesteund en uitgedragen.[300,301,302] Enkele kenmerken van zo'n beleid zijn:

- Maak met elkaar afspraken over toetsing, onderwijstijd en materiaalgebruik, over de notatie van oplossingsmanieren, over de begeleiding van leerlingen die zeer goed presteren of juist achterblijven in rekenen-wiskunde en over de doorlopende leerlijnen.
- Maak afspraken over het gebruik van reken-wiskundetaal door de hele school. Stel bijvoorbeeld een lijst op met benamingen voor belangrijke begrippen, zoals decimale getallen.
- Formuleer gezamenlijke ambities over de kerndoelen en referentieniveaus en over de voorbereiding op het gebruik van rekenen-wiskunde in het dagelijks leven en in het vervolgonderwijs.
- Beschrijf de wiskundige attitude die je bij leerlingen wilt ontwikkelen, bijvoorbeeld dat ze weten dat rekenen-wiskunde nuttig en belangrijk is, en ook plezierig en interessant kan zijn.[303] Laat leerlingen ervaren dat iedereen die zijn best doet en passende begeleiding krijgt, rekenen-wiskunde kan leren.[304]

In het kader *Reflectie-instrumenten voor schoolteams* op pagina 49 staan instrumenten die je kunt inzetten om als schoolteam in gesprek te gaan over kwaliteit en beleid rondom het reken-wiskundeonderwijs.

Laat het beleidsplan niet in een bureaula verdwijnen, maar gebruik het als levend document om samen het reken-wiskundeonderwijs te evalueren en verbeteren.

Maak het beleidsplan concreet en zorg voor een positieve inbedding. Leerkrachten moeten het volledige reken-wiskundecurriculum overzien en de doorgaande leerlijnen kennen. Laat ze de voortgang van leerlingen volgen, reflecteren op de resultaten en op de eigen manier van lesgeven.[305] Zorg dat iedereen overtuigd is van het belang en de haalbaarheid van goed reken-wiskundeonderwijs. En motiveer iedereen om dit uit te stralen.

Een onderdeel van het reken-wiskundebeleid is de keuze voor een reken-wiskundemethode. Onderzoek toont aan dat er geen duidelijk verband bestaat tussen de rekenprestaties en reken-wiskundemethodes.[306,307,308] Het is niet zozeer de reken-wiskundemethode die het verschil maakt, maar de leerkracht die de methode gebruikt. Om het reken-wiskundeonderwijs te versterken is professionalisering van de leerkrachten de belangrijkste factor: hen goed toerusten voor reken-wiskundeonderwijs sorteert het grootste effect.[309]

Professionele leergemeenschap

Gezamenlijk en continu werken aan beter onderwijs kan in de vorm van een professionele leergemeenschap (PLG). Dit is een samenwerkingsverband van leerkrachten en schoolleiding waarin zij informatie, ervaringen en kennis delen over een specifiek vakgebied. PLG's zijn de beste manier om het reken-wiskundeonderwijs en de leerlingprestaties blijvend te verbeteren.[310] Bekijk de leidraad *Werken aan onderwijsverbetering in het primair onderwijs* voor meer informatie.

6.2 Faciliteer en stimuleer als schoolleiding dat leerkrachten zich professionaliseren

Vakinhoudelijke en vakdidactische kennis en vaardigheden van leerkrachten bepalen in belangrijke mate de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs en daarmee de rekenprestaties van de leerlingen.[311,312] Het gaat hierbij om:

- algemene pedagogische vaardigheden om een productieve leeromgeving in de klas te creëren
- diepgaande reken-wiskundige kennis en vaardigheden, begrip van de concepten en procedures die leerlingen moeten leren
- vakdidactische kennis, zoals kennis over hoe leerlingen denken, hoe ze rekenen-wiskunde leren, en wat gangbare misconcepties van leerlingen zijn.

Professionalisering is noodzakelijk om vakinhoudelijke en vakdidactische kennis en vaardigheden te ontwikkelen en up-to-date te houden. Professionalisering heeft vooral een positief effect als het gezamenlijk en langdurig plaatsvindt.[313,314] Betrokkenen moeten ervan overtuigd zijn dat verbetering een gezamenlijke verantwoordelijkheid is en dat ze met elkaar de capaciteiten hebben om het onderwijs te verbeteren.[315]

6.3 Geef een rekencoördinator voldoende tijd en mogelijkheden om het team te ondersteunen

De prestaties van leerlingen gaan vooruit als er op school een rekencoach is die de leerkrachten inspireert en ondersteunt bij hun reken-wiskundeonderwijs.[316,317] In Nederland worden deze coaches vaak rekencoördinatoren genoemd. Ze zorgen onder andere voor reken-wiskundige professionalisering van collega's en houden de nieuwste ontwikkelingen op het gebied van reken-wiskundeonderwijs in de gaten. Verder zijn ze verantwoordelijk voor het reken-wiskundebeleid en voor de keuze en invoering van de reken-wiskundemethode, waarbij ze het hele team betrekken. Ze spelen een sleutelrol in het benutten van kennis en expertise.[318]

De rekencoördinator

Het functieprofiel voor een rekencoördinator van de Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO) vind je op *www.nvorwo.nl/wp-content/uploads/2024/06/NVORWO-2024-2.pdf*

De Nationale RekencoördinatorDag (NRCD) biedt rekencoördinatoren mogelijkheden om hun kennis en vaardigheden uit te wisselen en te verdiepen.

Zorg als school dat je een rekencoördinator hebt, leg de taken vast en geef de rekencoördinator voldoende tijd en mogelijkheden om de collega's te ondersteunen, zodat hun professionele kennis zich als een olievlek kan verspreiden. Samenwerking tussen verschillende rekencoördinatoren in een bovenschools netwerk leidt tot diepere inzichten en een duurzame basis voor het reken-wiskundeonderwijs van de betrokken scholen.[319]

6.4 Realiseer een schoolcultuur van hoge verwachtingen

Hoge verwachtingen dragen bij aan betere prestaties.[320,321] Je laat bewust of onbewust zien wat je van een leerling verwacht door de vragen die je stelt, de beurten die je geeft, oogcontact, verschil in opdrachten, indeling in groepjes, hoeveelheid denktijd, enzovoort. Om te voorkomen dat leerlingen stranden in de overtuiging dat ze het toch nooit zullen leren, moet je er als leerkracht oprecht van overtuigd zijn dat alle leerlingen rekenen-wiskunde kunnen leren. Straal die overtuiging uit door flexibel te groeperen, heldere leerdoelen te stellen en een positief leerklimaat zonder competitie te realiseren.

Hoge verwachtingen hebben betekent niet dat alle leerlingen uiteindelijk even ver komen in hun reken-wiskundige ontwikkeling. Maar wees ervan overtuigd dat iedere leerling verder kán komen.[322] Zorg dat alle betrokkenen op school overtuigd zijn van het belang van goed reken-wiskundeonderwijs en dat de leerlingen allemaal elke dag iets beter kunnen worden in rekenen-wiskunde.

Reflectie-instrumenten voor schoolteams

Er bestaan verschillende reflectie-instrumenten voor schoolteams om gesprekken over reken-wiskunde-onderwijs te voeren:

- **Prioriteitenspel**

Met dit spel ontwikkelen teams een gedeelde visie en prioriteiten voor onderwijsverbeteringen. De spelkaarten en handleiding staan op de website van SLO.

Kijk op *https://www.slo.nl/@23269/prioriteitenspel-beleid-rekenen-wiskunde/*

Er is ook een variant voor (potentieel) sterke rekenaars:
Kijk op: *https://www.slo.nl/@23270/prioriteitenspel-rekenbeleid-variant/*

- **Teamgids rekenen-wiskunde**

Deze gids biedt materialen en activiteiten voor drie teambijeenkomsten om gezamenlijk te reflecteren op de onderwijspraktijk.

Kijk op: *https://www.slo.nl/thema/meer/curriculum-ontwikkeling/teamgidsen/*

- **Reflectiewijzer rekenen-wiskunde**

De reflectiewijzer van de Inspectie van het Onderwijs bevat vragen over onderwijsverbetering en geeft suggesties over doelen en leerlijnen, teams faciliteren, ontwikkeling en differentiatie. De reflectiewijzer vind je op: *https://www.onderwijsinspectie.nl/documenten/publicaties/2025/02/19/reflectiewijzer-rekenen-wiskunde-bo-sbo-en-so*

Referenties

1 Van Luit, J.E.H., & Schoevers, E.M. (2025). *Leidraad betekenisvol en doelgericht reken-wiskundeonderwijs in groep 1-2*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek. www.onderwijskennis.nl/node/6656

2 SLO (2025). Kerndoelen primair onderwijs. SLO.

3 Meijerink, H. (Ed.). (2009). ***Referentiekader taal en rekenen***. De referentieniveaus. OCW/SLO.

4 Hickendorff, M., Mostert, T. M. M., Van Dijk, C. J., Jansen, L. L. M., Van der Zee, L. L., & Fagginger Auer, M. F. F. (2017). *Rekenen op de basisschool. Review van de samenhang tussen beïnvloedbare factoren in het onderwijsleerproces en de rekenwiskundeprestaties van basisschoolleerlingen*. https://www.nro.nl/onderzoeksprojecten/reviewstudie-rekenen-einde-basisonderwijs

5 KNAW. (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. KNAW.

6 Slavin, R. E., & Lake, C. (2008). Effective Programs in Elementary Mathematics: A Best-Evidence Synthesis. *Review of Educational Research, 78*(3), 427-455. https://doi.org/10.3102/0034654308317473

7 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

8 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

9 Hickendorff, M., Mostert, T. M. M., Van Dijk, C. J., Jansen, L. L. M., Van der Zee, L. L., & Fagginger Auer, M. F. F. (2017). *Rekenen op de basisschool. Review van de samenhang tussen beïnvloedbare factoren in het onderwijsleerproces en de rekenwiskundeprestaties van basisschoolleerlingen*. https://www.nro.nl/onderzoeksprojecten/reviewstudie-rekenen-einde-basisonderwijs

10 Slavin, R. E., & Lake, C. (2008). Effective Programs in Elementary Mathematics: A Best-Evidence Synthesis. *Review of Educational Research, 78*(3), 427-455. https://doi.org/10.3102/0034654308317473

11 Inspectie van het Onderwijs (2025). *De Staat van het Onderwijs 2025*. Inspectie van het Onderwijs.

12 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

13 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

14 SLO (2025). Kerndoelen primair onderwijs. SLO.

15 Meijerink, H. (Ed.). (2009). *Referentiekader taal en rekenen*. De referentieniveaus. OCW/SLO.

16 Van Luit, J.E.H., & Schoevers, E.M. (2025). *Leidraad betekenisvol en doelgericht reken-wiskundeonderwijs in groep 1-2*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek. www.onderwijskennis.nl/node/6656

17 De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Learning and teaching mathematics. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). Macmillan.

18 SLO (2025). Kerndoelen primair onderwijs. SLO.

19 Codding, R. S., Burns, M. K., & Lukito, G. (2011). Meta-analysis of mathematic basic-fact fluency interventions: A component analysis. *Learning Disabilities Research & Practice, 26*(1), 36-47. https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2010.00323.x

20 Boaler, J. (2015). *Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts*. YouCubed. https://www.youcubed.org/evidence/fluency-without-fear

21 Boaler, J. (2015). *Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts*. YouCubed. https://www.youcubed.org/evidence/fluency-without-fear

22 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

23 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

24 Canobi, K. H. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*(2), 131-149. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.07.008

25 Boaler, J. (2015). *Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts*. YouCubed. https://www.youcubed.org/evidence/fluency-without-fear

26 Codding, R. S., Burns, M. K., & Lukito, G. (2011). Meta-analysis of mathematic basic-fact fluency interventions: A component analysis. *Learning Disabilities Research & Practice, 26*(1), 36-47. https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2010.00323.x

27 Inspectie van het Onderwijs (2011). *Automatiseren bij rekenen-wiskunde. Een onderzoek naar het automatiseren van basisbewerkingen rekenen-wiskunde in het basisonderwijs*. Inspectie van het Onderwijs.

28 Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R., & Witzel, B. (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools (NCEE 2009-4060)*. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:4889481

29 Powell, S. L., Duhon, G., Poncy, B. C., Mwavita, M., & Englen, A. J. (2022). Distributed practice in math facts fluency: A comparative analysis of varied intersession intervals. *School Psychology Review, 51*(5), 517-525.

30 Kennisrotonde. (2023). *Is een kwartier rekenautomatisering per dag effectief voor de rekenautomatisering van basisschool-leerlingen? Welke invulling (qua aanpak en inhoud) is het effectiefst per leerjaar?* (KR. 1849)

31 Drijvers, P. (2006). *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school*. Freudenthal Instituut.

32 Menne, J. J. M. (2001). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100—een onderwijsexperiment*. Wilco.

33 Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(4), 587-597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

34 Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(4), 587-597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

35 Van Groenestijn, M., Borghouts, C. & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige Reken-WiskundeProblemen en Dyscalculie*. Van Gorcum.

36 Rittle-Johnson, B., Loehr, A. M., & Durkin, K. (2017). Promoting self-explanation to improve mathematics learning: A meta-analysis and instructional design principles. *ZDM Mathematics Education, 49*, 599-611. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0834-z

37 Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(4), 587-597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

38 Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental psychology, 47*(6), 1525-1538. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/a0024997

39 Canobi, K. H. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*(2), 131-149. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.07.008

40 Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(4), 587-597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

41 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

42 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

43 Schroeder, N. L., Nesbit, J. C., Anguiano, C. J., & Adesope, O. O. (2017). Studying and constructing concept maps: A meta-analysis. *Educational Psychology Review*, 1-25. https://doi.org/10.1007/s10648-017-9403-9

44 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

45 De Gamboa, G., Badillo, E. & Font, V. (2023). Meaning and structure of mathematical connections in the classroom. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 23*, 241-261. https://doi.org/10.1007/s42330-023-00281-2

46 Fagginger Auer, M., Hickendorff, M., & van Putten, C. (2018). Training can increase students' choices for written solution strategies and performance in solving multi-digit division problems. *Frontiers in Psychology, 9*, 1644. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01644

47 Hickendorff, M., van Putten, C., Verhelst, N., & Heiser, W. (2010). Individual differences in strategy use on division problems: Mental versus written computation. *Journal of Educational Psychology, 102*(2), 438-452. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/a0018177

48 Lin, X., Peng, P., & Zeng, J. G. (2021). Understanding the relation between mathematics vocabulary and mathematics performance: A meta-analysis. *The Elementary School Journal, 121*(3), 504-540. https://doi.org/10.1086/712504

49 Ufer, S., & Bochnik, K. (2020). The role of general and subject-specific language skills when learning mathematics in elementary school. *Journal für Mathematik-Didaktik JMD, 41*(1), 81-117.

50 Klibanoff, R., Levine, S., Huttenlocher, J., Vasilyeva, M., & Hedges. L. (2006). Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "Math Talk". *Developmental Psychology, 42*(1), 59-69. https://doi.org/10.1037/0012-1649.42.1.59

51 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

52 Durkin, K., Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: Lessons learned and next steps. *ZDM Mathematics Education, 49*, 585-597. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0853-9

53 Hickendorff, M., & van Zanten, M. (2024). Opportunity to learn flexible and adaptive strategy use in current and past Dutch mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-18. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2435827

54 Nemeth, L., & Lipowsky, F. (2023). The role of prior knowledge and need for cognition for the effectiveness of interleaved and blocked practice. *European Journal of Psychology of Education*. https://doi.org/10.1007/s10212-023-00723-3

55 Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs: A meta-analysis. *Remedial and Special Education, 24*(2), 97-114. https://doi.org/10.1177/07419325030240020501

56 Timmermans, R. E., & Van Lieshout, E. C. D. M. (2003). Influence of instruction in mathematics for low performing students on strategy use. *European journal of special needs education, 18*(1), 5-16. https://doi.org/10.1080/0885625032000042285

57 Peltenburg, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2012). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100—A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 351-369. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9351-0

58 Nemeth, L., & Lipowsky, F. (2023). The role of prior knowledge and need for cognition for the effectiveness of interleaved and blocked practice. *European Journal of Psychology of Education*. https://doi.org/10.1007/s10212-023-00723-3

59 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

60 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

61 Halberda, J., Mazzocco, M. M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature, 455*(7213), 665-668. https://doi.org/10.1038/nature07246

62 De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Learning and teaching mathematics. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). Macmillan.

63 Siegler, R., Thompson, C., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

64 Siegler, R., Thompson, C., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

65 Buys, K. (2005). Van procedure- naar begripsgericht onderwijs – voorbeeld van een leerlijn kommagetallen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 24*(1), 9-17.

66 Clements, D., & Sarama, J. (2011). Early childhood mathematics intervention. *Science, 333*, 968-970. https://doi.org/10.1126/science.1204537

67 Hawes, Z., Gilligan-Lee, K., & Mix, K. (2022). Effects of spatial training on mathematics performance: A meta-analysis. *Developmental Psychology, 58*(1), 112-137. https://doi.org/10.1037/dev0001281

68 Judd, N., & Klingberg, T. (2021). Training spatial cognition enhances mathematical learning in a randomized study of 17,000 children. *Nature Human Behaviour, 5*(11), 1548-1554. https://doi.org/10.1038/s41562-021-01118-4

69 Hawes, Z., & Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review, 27*, 465-482. https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7

70 Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380-400. http://dx.doi.org/10.1037/a0031084

71 Hawes, Z., Gilligan-Lee, K., & Mix, K. (2022). Effects of spatial training on mathematics performance: A meta-analysis. *Developmental Psychology, 58*(1), 112-137. https://doi.org/10.1037/dev0001281

72 Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380-400. http://dx.doi.org/10.1037/a0031084

73 Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational psychology review, 26*, 9-25. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9249-3

74 Mavilidi, M., Ouwehand, K., Okely, A. D., Chandler, P., & Paas, F. (2019). Embodying learning through physical activity and gestures in preschool children. In S. Tindall-Ford, S. Agostinho, & J. Sweller (Eds.), Advances in cognitive load theory: Rethinking teaching (pp. 103-118). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429283895-9

75 Van Luit, J.E.H., & Schoevers, E.M. (2025). *Leidraad betekenisvol en doelgericht reken-wiskundeonderwijs in groep 1-2*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek. www.onderwijskennis.nl/node/6656

76 Schoenherr, J., Strohmaier, A. R., & Schukajlow, S. (2024). Learning with visualizations helps: A meta-analysis of visualization interventions in mathematics education. *Educational Research Review, 45*, 100639. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2024.100639

77 Sokolowski, A. (2018). The effects of using representations in elementary mathematics: Meta-analysis of research. *IAFOR Journal of Education, 6*(3), 129-152.

78 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

79 Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational psychology review, 26*, 9-25. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9249-3

80 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

81 Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380-400. http://dx.doi.org/10.1037/a0031084

82 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

83 Koskinen, R., & Pitkäniemi, H. (2022). Meaningful learning in mathematics: A research synthesis of teaching approaches. *International electronic journal of mathematics education, 17*(2). https://doi.org/10.29333/iejme/11715

84 Van Groenestijn, M., Borghouts, C. & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige Reken-WiskundeProblemen en Dyscalculie*. Van Gorcum.

85 Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380-400. http://dx.doi.org/10.1037/a0031084

86 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

87 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

88 Van Dijk, I. (2002). *The learner as designer: Processes and effects of an experimental programme in modeling in primary mathematics education*. Vrije Universiteit.

89 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

90 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

91 Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist, 41*(2), 75-86. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1

92 Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380-400. http://dx.doi.org/10.1037/a0031084

93 Hawes, Z., Gilligan-Lee, K., & Mix, K. (2022). Effects of spatial training on mathematics performance: A meta-analysis. *Developmental Psychology, 58*(1), 112-137. https://doi.org/10.1037/dev0001281

94 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

95 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

96 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

97 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

98 Bunck, M., Terlien, E., Van Groenestijn, M., Toll, S. & Van Luit, H. (2017). Observing and analyzing children's mathematical development, based on action theory. *Educational Studies in Mathematics 96*(3), 289-304. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9763-6

99 Bunck, M., Terlien, E., Van Groenestijn, M., Toll, S. & Van Luit, H. (2017). Observing and analyzing children's mathematical development, based on action theory. *Educational Studies in Mathematics 96*(3), 289-304. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9763-6

100 Clements, D., & Sarama, J. (2011). Early childhood mathematics intervention. *Science, 333*, 968-970. https://doi.org/10.1126/science.1204537

101 Hawes, Z., Gilligan-Lee, K., & Mix, K. (2022). Effects of spatial training on mathematics performance: A meta-analysis. *Developmental Psychology, 58*(1), 112-137. https://doi.org/10.1037/dev0001281

102 Schoevers, E. M., Kroesbergen, E. H., Jonker, V. H., & Keijzer, R. (2016). Meetkunde, kunst en creativiteit: Een lessenserie ook voor zwakkere rekenaars. *Volgens Bartjens, 36*(2), 26-28.

103 Barrett, J., Sarama, J., Clements, D., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C. & Klanderman, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(1), 28-54. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.625075

104 Idrus, H., Rahim, S. S. A., & Zulnaidi, H. (2022). Conceptual knowledge in area measurement for primary school students: A systematic review. *STEM Education, 2*(1), 47-58. https://doi.org/10.3934/steme.2022003

105 Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta analysis of training studies. *Psychological Bulletin, 139*(2), 352-402. https://doi.org/10.1037/a0028446

106 Hawes, Z., Gilligan-Lee, K., & Mix, K. (2022). Effects of spatial training on mathematics performance: A meta-analysis. *Developmental Psychology, 58*(1), 112-137. https://doi.org/10.1037/dev0001281

107 Boonstra, K., Kool, M., Shvarts, A., & Drijvers, P. (2023). Theories and practical perspectives on fostering embodied abstraction in primary school geometry education. *Frontiers in Education, 8*, 1-13.

108 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

109 Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta analysis of training studies. *Psychological Bulletin, 139*(2), 352-402. https://doi.org/10.1037/a0028446

110 Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (2009). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde. Tussendoelen annex leerlijnen*. Onderbouw basisschool. Wolters-Noordhoff.

111 Confrey, J., Maloney, A. P., & Corley, A. K. (2014). Learning trajectories: a framework for connecting standards with curriculum. *ZDM Mathematics Education, 46*(5), 719-733. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0598-7

112 Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

113 Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

114 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

115 Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

116 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

117 Clarke, S., Timperley, H. & Hattie, J. (2004). *Unlocking Formative Assessment: Practical Strategies for Enhancing Students' Learning in the Primary and Intermediate Classroom*. Hodder Moa Beckett. https://doi.org/10.24135/teacherswork.v1i2.380

118 Zimmerman, B. J. (2001). Achieving academic excellence: A self-regulatory perspective. In M. Ferrari (ED.), *The pursuit of excellence through education* (pp. 85-110). Routledge.

119 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

120 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

121 Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2015). Readiness-based differentiation in primary school mathematics: Expert recommendations and teacher self-assessment. *Frontline Learning Research, 3*(2), 90-116. https://doi.org/10.14786/flr.v3i2.163

122 Roy, A., Guay, F., & Valois, P. (2013). Teaching to address diverse learning needs: Development and validation of a differentiated instruction scale. *International Journal of Inclusive Education, 17*(11), 1186-1204. https://doi.org/10.1080/13603116.2012.743604

123 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

124 Veldhuis, M. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). Supporting primary school teachers' classroom assessment in mathematics education: effects on student achievement. *Mathematics Education Research Journal*, *32*, 449-471. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00270-5

125 Deunk, M. I., Smale-Jacobse, A. E., de Boer, H., Doolaard, S., & Bosker, R. J. (2018). Effective differentiation practices: A systematic review and meta-analysis of studies on the cognitive effects of differentiation practices in primary education. *Educational Research Review, 24*, 31-54. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2018.02.002

126 Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2018a). Differentiated instruction in primary mathematics: Effects of teacher professional development on student achievement. *Learning and Instruction*, *54*, 22-34. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.01.009

127 Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2018a). Differentiated instruction in primary mathematics: Effects of teacher professional development on student achievement. *Learning and Instruction*, *54*, 22-34. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.01.009

128 Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2015). Readiness-based differentiation in primary school mathematics: Expert recommendations and teacher self-assessment. *Frontline Learning Research*, *3*(2), 90-116. https://doi.org/10.14786/flr.v3i2.163

129 Keuning, T., van Geel, M., & Dobbelaer, M. (2022). *ADAPT: krijg zicht op differentiatievaardigheden*. Pica.

130 Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2018a). Differentiated instruction in primary mathematics: Effects of teacher professional development on student achievement. *Learning and Instruction*, *54*, 22-34. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.01.009

131 Van der Vegt, A. (2022). *Beheersingsleren houdt leerlingen bij de les*. Onderwijskennis.nl (NRO). www.onderwijskennis.nl/node/2364

132 Hickendorff, M., Mostert, T. M. M., Van Dijk, C. J., Jansen, L. L. M., Van der Zee, L. L., & Fagginger Auer, M. F. F. (2017). *Rekenen op de basisschool. Review van de samenhang tussen beïnvloedbare factoren in het onderwijsleerproces en de rekenwiskundeprestaties van basisschoolleerlingen*. https://www.nro.nl/onderzoeksprojecten/reviewstudie-rekenen-einde-basisonderwijs

133 Jacobse, A. E., & Harskamp, E. G. (2011). *A meta-analysis of the effects of instructional interventions on students' mathematics achievement*. GION.

134 KNAW. (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. KNAW.

135 Slavin, R. E., & Lake, C. (2008). Effective Programs in Elementary Mathematics: A Best-Evidence Synthesis. *Review of Educational Research*, *78*(3), 427-455. https://doi.org/10.3102/0034654308317473

136 De Jong, T., Lazonder, A. W., Chinn, C. A., Fischer, F., Gobert, J., Hmelo-Silver, C. E., ... & Zacharia, Z. C. (2023). Let's talk evidence – The case for combining inquiry-based and direct instruction. *Educational Research Review, 39*, 100536. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2023.100536

137 De Jong, T., Lazonder, A. W., Chinn, C. A., Fischer, F., Gobert, J., Hmelo-Silver, C. E., ... & Zacharia, Z. C. (2023). Let's talk evidence – The case for combining inquiry-based and direct instruction. *Educational Research Review, 39*, 100536. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2023.100536

138 Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs: A meta-analysis. *Remedial and Special Education*, *24*(2), 97-114. https://doi.org/10.1177/07419325030240020501

139 Van der Vegt, A. (2025). *Het inzetten van expliciete instructie*. Onderwijskennis.nl (NRO). www.onderwijskennis.nl/node/689

140 Hollingsworth, J., & Ybarra, S. (2020). *Expliciete directe instructie 2.0. Tips en technieken voor een goede les* (M. Schmeier, vertaling/bewerking). Pica. (Originele Engelstalige tweede editie: 2017).

141 Blöte, A. W., van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93*(3), 627-638. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.3.627

142 De Jong, T., Lazonder, A. W., Chinn, C. A., Fischer, F., Gobert, J., Hmelo-Silver, C. E., ... & Zacharia, Z. C. (2023). Let's talk evidence – The case for combining inquiry-based and direct instruction. *Educational Research Review, 39*, 100536. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2023.100536

143 De Jong, T., Lazonder, A. W., Chinn, C. A., Fischer, F., Gobert, J., Hmelo-Silver, C. E., ... & Zacharia, Z. C. (2023). Let's talk evidence – The case for combining inquiry-based and direct instruction. *Educational Research Review, 39*, 100536. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2023.100536

144 De Jong, T., Lazonder, A. W., Chinn, C. A., Fischer, F., Gobert, J., Hmelo-Silver, C. E., ... & Zacharia, Z. C. (2023). Let's talk evidence – The case for combining inquiry-based and direct instruction. *Educational Research Review, 39*, 100536. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2023.100536

145 Jacobse, A. E., & Harskamp, E. G. (2011). *A meta-analysis of the effects of instructional interventions on students' mathematics achievement*. GION.

146 De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 49-97). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_3

147 Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713-717). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

148 Inspectie van het Onderwijs (2024). *Peil rekenen-wiskunde einde (speciaal) basisonderwijs en speciaal onderwijs 2022-2023*. Inspectie van het Onderwijs.

149 Faber, J. M., Luyten, H., & Visscher, A. J. (2017). The effects of a digital formative assessment tool on mathematics achievement and student motivation: Results of a randomized experiment. *Computers & Education, 106*, 83-96. https://doi.org/10.1016/J.COMPEDU.2016.12.001

150 Hardman, J. (2019). Towards a pedagogical model of teaching with ICTs for mathematics attainment in primary school: A review of studies 2008-2018. *Heliyon, 5*(5), e01726. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e01726

151 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

152 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

153 Kingston, N., & Nash, B. (2011). Formative Assessment: A Meta-Analysis and a Call for Research. *Educational Measurement: Issues and Practice, 30*(4), 28-37. https://doi.org/10.1111/j.1745-3992.2011.00220.x

154 Fyfe, E. R., & Brown, S. A. (2018). Feedback influences children's reasoning about math equivalence: A meta-analytic review. *Thinking & Reasoning, 24*(2), 157-178. https://doi.org/10.1080/13546783.2017.1359208

155 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

156 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

157 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

158 Siegler, R., Thompson, C., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

159 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

160 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

161 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

162 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

163 Bray, W. (2013). How to leverage the potential of mathematical errors. *Teaching Children Mathematics, 19*(7), 424-431.

164 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

165 Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R., & Witzel, B. (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools* (NCEE 2009-4060). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:4889481

166 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

167 Keijzer, R. & Hotze, A. (2020). *De sterke rekenaar zit dikwijls op de gang. Aandacht voor zwakke rekenaars gaat voor*. ScienceGuide

168 Inspectie van het Onderwijs (2019). *Reken-en wiskundeonderwijs aan potentieel hoogpresterende leerlingen*. Inspectie van het Onderwijs.

169 Prast, E. J., & Hickendorff, M. (2023). How do Dutch teachers implement differentiation in primary mathematics education? In R. Maulana, M. Helms-Lorenz, & R. Klassen (Eds), *Effective teaching around the world: Contemporary insights* (pp. 757-774). Springer.

170 Gavin, M. K., Casa, T. M., Adelson, J. L., Carroll, S. R., & Sheffield, L. J. (2009). The impact of advanced curriculum on the achievement of mathematically promising elementary students. *Gifted Child Quarterly, 53*(3), 188-202. https://doi.org/10.1177/0016986209334964

171 Sjoers, S. (2018). Sterke rekenaars in het basisonderwijs: de theoretische onderbouwing. *Volgens Bartjens-Ontwikkeling en Onderzoek, 37*(4), 41-51.

172 Van Groenestijn, M., Borghouts, C. & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige Reken-WiskundeProblemen en Dyscalculie*. Van Gorcum.

173 Borghouts, C. (2011). De Vertaalcirkel. Werken aan begrip en inzicht bij (zwakke) rekenaars. *Volgens Bartjens, 31*(2), 8-11.

174 Borghouts, C. (2012a). De Vertaalcirkel. Werken aan begrip en inzicht bij (zwakke) rekenaars (2). *Volgens Bartjens, 31*(3), 7-11.

175 Borghouts, C. (2012b). De Vertaalcirkel. Werken aan begrip en inzicht bij (zwakke) rekenaars (3). *Volgens Bartjens, 31*(4), 7-10.

176 Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R., & Witzel, B. (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools (NCEE 2009-4060)*. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:4889481

177 Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. In F.M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 3-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1

178 Rosli, R., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2014). The effects of problem posing on student mathematical learning: A meta-analysis. *International Education Studies, 7*(13), 227-241. http://dx.doi.org/10.5539/ies.v7n13p227

179 Wang, M., Walkington, C., & Rouse, A. (2022). A meta-analysis on the effects of problem-posing in mathematics education on performance and dispositions. *Investigations in Mathematics Learning, 14*(4), 265-287.

180 De Koning, B. B., Boonen, A. J., & van der Schoot, M. (2017). The consistency effect in word problem solving is effectively reduced through verbal instruction. *Contemporary Educational Psychology, 49*, 121-129. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2017.01.006

181 Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM Mathematics Education, 52*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

182 Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM Mathematics Education*, *52*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

183 Mostert, T. M. M., & Hickendorff, M. (2023). Pizzas or no pizzas: An advantage of word problems in fraction arithmetic? *Learning and Instruction*, *86*, 101775.

184 Boonen, A. J., de Koning, B. B., Jolles, J., & Van der Schoot, M. (2016). Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training. *Frontiers in Psychology*, *7*, 191. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00191

185 Hickendorff, M. (2021). The demands of simple and complex arithmetic word problems on language and cognitive resources. *Frontiers in Psychology*, *4494*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.727761

186 NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM

187 Van Zanten, M., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, *50*(5), 827-838. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0973-x

188 Advisory Committee on Mathematics Education [ACME]. (2011). *Mathematical Needs: Mathematics in the workplace and in Higher Education*. Royal Society.

189 Advisory Committee on Mathematics Education [ACME]. (2016). *Problem solving in mathematics: realising the vision through better assessment*. Royal Society.

190 Hodgen, J., & Marks, R. (2013). *The Employment Equation: Why our young people need more maths for today's jobs*. The Sutton Trust.

191 Kolovou, A., Van Den Heuvel-Panhuizen, M., & Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks – a needle in a haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(2), 29-66.

192 Van Zanten, M., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, *50*(5), 827-838. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0973-x

193 Van Zanten, M., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, *50*(5), 827-838. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0973-x

194 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

195 Huang, M. C. L., Chou, C. Y., Wu, Y. T., Shih, J. L., Yeh, C. Y. C., Lao, A. C. C., Fong, H., Lin, Y. F., & Chan, T. W. (2020). Interest-driven video creation for learning mathematics. *Journal of Computers in Education*, *7*(3), 395-433. https://doi.org/10.1007/s40692-020-00161-w

196 Seleznyov, S., Adhami, M., Black, A., Hodgen, J., & Twiss, S. (2022). Cognitive acceleration in mathematics education: further evidence of impact. *Education 3-13*, *50*(5), 564-576. https://doi.org/10.1080/03004279.2021.1872678

197 Bostic, J. D., Vostal, B., & Folger, T. (2021). Growing TTULPs through your lessons. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, *114*(7), 498-507. https://doi.org/10.5951/MTLT.2020.0341

198 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

199 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

200 Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., & Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: A response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, *42*(2), 99-107. https://doi.org/10.1080/00461520701263368

201 Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., & Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: A response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, *42*(2), 99-107. https://doi.org/10.1080/00461520701263368

202 Van Groenestijn, M., Borghouts, C. & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige Reken-WiskundeProblemen en Dyscalculie*. Van Gorcum.

203 Kool, M. & Lit, S. (2025). Wiskundig probleemoplossen. Een stappenplan voor de leerkracht. *Volgens Bartjens*, *44*(4), 4-7.

204 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

205 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

206 Ayalon, M., & Rubel, L. H. (2022). Selecting and sequencing for a whole-class discussion: Teachers' considerations. *The Journal of Mathematical Behavior, 66*, 100958. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100958

207 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

208 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

209 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

210 Takahashi, A. (2021) *Teaching mathematics through problem-solving. A pedagogical approach from Japan*. Routledge.

211 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

212 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

213 Leavy, A., & Hourigan, M. (2022). The framework for posing elementary mathematics problems (F-PosE): Supporting teachers to evaluate and select problems for use in elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 111*(1), 147-176. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10155-3

214 Larsson, M., & Ryve, A. (2012). Balancing on the edge of competency-oriented versus procedural-oriented practices: Orchestrating whole-class discussions of complex mathematical problems. *Mathematics Education Research Journal, 24*(4), 447-465. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0049-0

215 Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking And Learning, 10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

216 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

217 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

218 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

219 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

220 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

221 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

222 Saadati, F., & Felmer, P. (2021). Assessing impact of a teacher professional development program on student problem-solving performance. *ZDM Mathematics Education, 53*(4), 799-816. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01214-1

223 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

224 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

225 Preston, J. A. (2007). *Student-centered versus teacher-centered mathematics instruction: A meta-analysis*. Doctoral Thesis, Indiana University of Pennsylvania. ProQuest UMI 3289778.

226 Kyriacou, C., & Issitt, J. (2008). *What characterises effective teacher-initiated teacher-pupil dialogue to promote conceptual understanding in mathematics lessons in England in key stages 2 and 3: A systematic review*. EPPI-Centre, Social Science Research Unit, Institute of Education, University of London.

227 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

228 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

229 SLO (2025). Kerndoelen primair onderwijs. SLO.

230 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

231 Kaitera, S., & Harmoinen, S. (2022). Developing mathematical problem-solving skills in primary school by using visual representations on heuristics. *Lumat, 10*(2). https://doi.org/10.31129/LUMAT.10.2.1696

232 Herold-Blasius, R. (2017). Strategy keys as tools for problem solving. *Mathematics Teaching in the Middle School, 23*(3), 146-153. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.23.3.0146

233 Schoenherr, J., Strohmaier, A. R., & Schukajlow, S. (2024). Learning with visualizations helps: A meta-analysis of visualization interventions in mathematics education. *Educational Research Review, 45*, 100639. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2024.100639

234 Sokolowski, A. (2018). The effects of using representations in elementary mathematics: Meta-analysis of research. *IAFOR Journal of Education, 6*(3), 129-152.

235 Manoharan, M., & Kaur, B. (2023). Mathematics teachers' perceptions of diagrams. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*(4), 1315-1337. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10312-3

236 Quinnell, L. (2014). Enhancing the teaching and learning of mathematical visual images. *Australian Mathematics Teacher, 70*(1), 18-25.

237 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

238 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

239 Rigelman, N. R. (2011). Bring, do, leave: Nurturing reasoning and sense making. *Teaching Children Mathematics, 18*(3), 190-197. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.18.3.0190

240 Di Teodoro, S., Donders, S., Kemp-Davidson, J., Robertson, P., & Schuyler, L. (2011). Asking good questions: Promoting greater understanding of mathematics through purposeful teacher and student questioning. *Canadian Journal of Action Research, 12*(2), 18-29. https://doi.org/10.33524/cjar.v12i2.16

241 Hallman-Thrasher, A., & Spangler, D. A. (2020). Purposeful questioning with high cognitive-demand tasks. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12, 113*(6), 446-459. https://nctm.org/mtlt11306fc

242 Di Teodoro, S., Donders, S., Kemp-Davidson, J., Robertson, P., & Schuyler, L. (2011). Asking good questions: Promoting greater understanding of mathematics through purposeful teacher and student questioning. *Canadian Journal of Action Research, 12*(2), 18-29. https://doi.org/10.33524/cjar.v12i2.16

243 Roorda, G., de Vries, S., & Smale - Jacobse, A. (2023). *Teaching Through Problem-solving en Lesson Study: Hoe ondersteunt TTP-LS wiskundedocenten om aandacht aan probleemoplossingsvaardigheden van leerlingen te besteden?* Rijksuniversiteit Groningen.

244 Di Teodoro, S., Donders, S., Kemp-Davidson, J., Robertson, P., & Schuyler, L. (2011). Asking good questions: Promoting greater understanding of mathematics through purposeful teacher and student questioning. *Canadian Journal of Action Research, 12*(2), 18-29. https://doi.org/10.33524/cjar.v12i2.16

245 Hallman-Thrasher, A. (2017). Prospective elementary teachers' responses to unanticipated incorrect solutions to problem-solving tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(6), 519-555. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9330-y

246 Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M. L., Herzig, P., Jitendra, A., Koedinger, K. R. Ogbuehi, P. (2012). *Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8: A practice guide(NCEE 2012-4055)*. National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

247 Conley, D., & French, E. (2014). Student ownership of learning as a key component of college readiness. *American Behavioral Scientist, 58*(8), 1018-1034. https://psycnet.apa.org/doi/10.1177/0002764213515232

248 Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM Mathematics Education, 49*, 307-322. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0864-6

249 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

250 Koskinen, R., & Pitkäniemi, H. (2022). Meaningful learning in mathematics: A research synthesis of teaching approaches. *International electronic journal of mathematics education, 17* (2). https://doi.org/10.29333/iejme/11715

251 Noteboom, A. (2013). *Spel in de rekenles. Beschrijvingen van spellen ter ondersteuning van het rekenen in het basisonderwijs*. SLO.

252 Buijs, K. (2011). Instructie in het reken-wiskunde-onderwijs – Aanzet tot een werkkader. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 30*(2), 6-14.

253 Hollingsworth, J., & Ybarra, S. (2020). *Expliciete directe instructie 2.0. Tips en technieken voor een goede les* (M. Schmeier, vertaling/bewerking). Pica. (Originele Engelstalige tweede editie: 2017).

254 Gleason, J., Livers, S., & Zelkowski, J. (2015). *Mathematics classroom observation protocol for practices: Descriptors manual*. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.21712.25600

255 Caspar G. & Tarim, K. (2015). Efficacy of the Cooperative Learning Method on Mathematics Achievement and Attitude: A Meta-Analysis Research. *Educational Sciences: Theory & Practice 15*(2), 553-559.

256 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

257 Oonk, W. & De Goeij, E. T. J. (2006). Wiskundige attitudevorming. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 25*(4), 37-39.

258 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

259 Hannula, M., Di Martino, P., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Heyd-Metzuyanim, E., Lutovac, S., … Goldin, G. A. (2016). *Attitudes, beliefs, motivation and identity in mathematics education: An overview of the field and future directions*. ICME-13 topical surveys. Springer.

260 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

261 Dignath, C., & Büttner, G. (2008). Components of fostering self-regulated learning among students. A meta-analysis on intervention studies at primary and secondary school level. *Metacognition and Learning, 3*(3), 231-264. https://doi.org/10.1007/s11409-008-9029-x

262 Gascoine, L., Higgins, S. & Wall, K. (2016), The assessment of metacognition in children aged 4-16 years: a systematic review. *Review of Education, 5*(1), 3-57. https://doi.org/10.1002/rev3.3077

263 SLO (2025). Kerndoelen primair onderwijs. SLO.

264 Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Miočević, M., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2018b). Relations between mathematics achievement and motivation in students of diverse achievement levels. *Contemporary Educational Psychology, 55*, 84-96. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2018.08.002

265 Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Miočević, M., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2018b). Relations between mathematics achievement and motivation in students of diverse achievement levels. *Contemporary Educational Psychology, 55*, 84-96. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2018.08.002

266 Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2015). Readiness-based differentiation in primary school mathematics: Expert recommendations and teacher self-assessment. *Frontline Learning Research, 3*(2), 90-116. https://doi.org/10.14786/flr.v3i2.163

267 Lauermann, F., Eccles, J. & Pekrun, R. (2017). Why do children worry about their academic achievement? An expectancy-value perspective on elementary students' worries about their mathematics and reading performance. *ZDM Mathematics Education, 49*(2), 339-354. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0832-1

268 Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology, 7*, Article 508. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

269 Van Luit, J., van Hoogmoed, A., van der Ven, S. & Friso-van den Bos, I. (2023). *Tweede addendum rapport Rekenen op de basisschool: Review (2019-2023) van de samenhang tussen beïnvloedbare factoren in het onderwijsleerproces en de rekenwiskundeprestaties van basisschoolleerlingen*. https://www.nro.nl/sites/nro/files/media-files/tweede_addendum_rapport_rekenen_op_de_basisschool.pdf

270 Jansen, B. (2023). Angst en falen houden elkaar in de greep bij rekenen en wiskunde. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek, 42*(4), 54-62.

271 Van den Bergh, L., Van Amerongen, M., Gunsch, R., Timmermans, M, & Timmermans, A. (2021). *Leidraad onderwijs vanuit hoge verwachtingen*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek. www.onderwijskennis.nl/node/776

272 Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology, 7*, Article 508. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

273 Dweck, C. S. (2014). *Mindsets and math/science achievement*. Carnegie Corporation of New York-Institute for Advanced Study Commission on Mathematics and Science Education.

274 Jansen, B. (2023). Angst en falen houden elkaar in de greep bij rekenen en wiskunde. *Volgens Bartjens—ontwikkeling en onderzoek*, *42*(4), 54-62.

275 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

276 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

277 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

278 Punter, R.A., Van de Velde, M., & Meelissen, M.R.M. (2021). Reken op jezelf! De complexe relatie tussen zelfvertrouwen in rekenen en rekenprestaties. *Volgens Bartjens—ontwikkeling en onderzoek*, *41*(2), 41-49

279 Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Miočević, M., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2018b). Relations between mathematics achievement and motivation in students of diverse achievement levels. *Contemporary Educational Psychology, 55*, 84-96. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2018.08.002

280 Higgins, S., Hall, E., Baumfield, V., & Moseley, D. (2005). *A meta-analysis of the impact of the implementation of thinking skills approaches on pupils*. EPPI-Centre, Social Science Research Unit, Institute of Education, University of London.

281 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

282 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

283 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

284 Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher, 43*(8), 404-412. https://doi.org/10.3102/0013189X14554450

285 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

286 Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M. L., Herzig, P., Jitendra, A., Koedinger, K. R. Ogbuehi, P. (2012). *Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8: A practice guide(NCEE 2012-4055)*. National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

287 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

288 Van Zanten, M., Bruin-Muurling, G. & Verschoor, M. (2018). Klopt dit wel? *Volgens Bartjens, 37*(5), 22-26.

289 Van Zanten, M., Bruin-Muurling, G. & Verschoor, M. (2018). Klopt dit wel? *Volgens Bartjens, 37*(5), 22-26.

290 Van Zanten, M., Bruin-Muurling, G. & Verschoor, M. (2018). Klopt dit wel? *Volgens Bartjens, 37*(5), 22-26.

291 Van Zanten, M. & Driebergen, M. (2022). Alle stemmen tellen. Democratisch burgerschap en rekenen-wiskunde. *Volgens Bartjens, 41*(5), 4-7.

292 Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology, 7*, Article 508. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

293 Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology, 7*, Article 508. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

294 Van den Bergh, L., Van Amerongen, M., Gunsch, R., Timmermans, M, & Timmermans, A. (2021). *Leidraad onderwijs vanuit hoge verwachtingen*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek. www.onderwijskennis.nl/node/776

295 Jansen, B. (2023). Angst en falen houden elkaar in de greep bij rekenen en wiskunde. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek, 42*(4), 54-62.

296 Verschoor, M., Van Zanten, M., Bruin-Muurling, G., & Oldengarm, S. (2023). *Reken-wiskundige factchecking in het basisonderwijs*. SLO.

297 Verschoor, M., Van Zanten, M., Bruin-Muurling, G., & Oldengarm, S. (2023). *Reken-wiskundige factchecking in het basisonderwijs*. SLO.

298 Ros, A. A., Amels, J., Spijkers-Stallaert, M., Van de Stolpe, Y, & Volman, M. (2023). *Leidraad werken aan onderwijsverbetering in het primair onderwijs*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek. www.onderwijskennis.nl/node/1509

299 Ros, A. A., Amels, J., Spijkers-Stallaert, M., Van de Stolpe, Y, & Volman, M. (2023). *Leidraad werken aan onderwijs-verbetering in het primair onderwijs*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek.www.onderwijskennis.nl/node/1509

300 Taylor, J. (2017). The Effectiveness of Instructional *Mathematics Coaching: A Study on How the Implementation of Instructional Mathematics Coaches in Elementary Schools Impacts Student Achievement and Promotes Teacher Self Efficacy (Doctoral dissertation)*. ProQuest Dissertations Publishing.

301 Vale, C., Davies, A., Weaven, M., Hooley, N., Davidson, K., & Loton, D. (2010). Leadership to improve mathematics outcomes in low SES schools and school networks. *Mathematics Teacher Education and Development, 12*(2), 47-71.

302 Vale, C., Davies, A., Weaven, M., Hooley, N., Davidson, K., & Loton, D. (2010). Leadership to improve mathematics outcomes in low SES schools and school networks. *Mathematics Teacher Education and Development, 12*(2), 47-71.

303 Henderson, P., Hodgen, J., Foster, C., & Kuchemann, D. (2022). *Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*. Education Endowment Foundation. https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/maths-ks-2-3

304 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

305 Hickendorff, M., Mostert, T., Van Dijk, C., Jansen, L., Van der Zee, L. & Fagginger Auer, M. (2018). Basiskwaliteit Nederlands rekenonderwijs is goed. *Basisschoolmanagement*, 6, 4-7.

306 Hickendorff, M., Mostert, T. M. M., Van Dijk, C. J., Jansen, L. L. M., Van der Zee, L. L., & Fagginger Auer, M. F. F. (2017). *Rekenen op de basisschool. Review van de samenhang tussen beïnvloedbare factoren in het onderwijsleerproces en de rekenwiskundeprestaties van basisschoolleerlingen*. https://www.nro.nl/onderzoeksprojecten/reviewstudie-rekenen-einde-basisonderwijs

307 Inspectie van het Onderwijs (2019). *Reken-en wiskundeonderwijs aan potentieel hoogpresterende leerlingen*. Inspectie van het Onderwijs.

308 Slavin, R. E., & Lake, C. (2008). Effective Programs in Elementary Mathematics: A Best-Evidence Synthesis. *Review of Educational Research, 78*(3), 427-455. https://doi.org/10.3102/0034654308317473

309 Slavin, R. E., & Lake, C. (2008). Effective Programs in Elementary Mathematics: A Best-Evidence Synthesis. *Review of Educational Research, 78*(3), 427-455. https://doi.org/10.3102/0034654308317473

310 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

311 Hickendorff, M., Mostert, T. M. M., Van Dijk, C. J., Jansen, L. L. M., Van der Zee, L. L., & Fagginger Auer, M. F. F. (2017). *Rekenen op de basisschool. Review van de samenhang tussen beïnvloedbare factoren in het onderwijsleerproces en de rekenwiskundeprestaties van basisschoolleerlingen*. https://www.nro.nl/onderzoeksprojecten/reviewstudie-rekenen-einde-basisonderwijs

312 Hickendorff, M. (2020). *Addendum rapport Rekenen op de basisschool: Review van de samenhang tussen beïnvloedbare factoren in het onderwijsleerproces en de rekenwiskunde-prestaties van basisschoolleerlingen*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO). https://www.nro.nl/sites/nro/files/media-files/timss_en_peil.rekenen-wiskunde_2023_addendum_reviewstudie_bijlage_3b.pdf

313 Hodgen, J., Foster, C., Marks, R., & Brown, M. (2018). *Evidence for Review of Mathematics Teaching: Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review*. Education Endowment Foundation.

314 Sims, S., & Fletcher-Wood, H. (2021). Identifying the characteristics of effective teacher professional development: a critical review. *School Effectiveness and School Improvement, 32*(1), 47-63.

315 NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

316 Taylor, J. (2017). *The Effectiveness of Instructional Mathematics Coaching: A Study on How the Implementation of Instructional Mathematics Coaches in Elementary Schools Impacts Student Achievement and Promotes Teacher Self Efficacy (Doctoral dissertation)*. ProQuest Dissertations Publishing.

317 Vale, C., Davies, A., Weaven, M., Hooley, N., Davidson, K., & Loton, D. (2010). Leadership to improve mathematics outcomes in low SES schools and school networks. *Mathematics Teacher Education and Development, 12*(2), 47-71.

318 Ros, A. A., Amels, J., Spijkers-Stallaert, M., Van de Stolpe, Y, & Volman, M. (2023). *Leidraad werken aan onderwijsverbetering in het primair onderwijs*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek. www.onderwijskennis.nl/node/1509

319 SLO (2022). *Handvatten voor werken vanuit hoge verwachtingen bij rekenen en wiskunde*. SLO. https://www.slo.nl/@24994/reken-wiskundeonderwijs-vanuit-hoge/

320 SLO (2022). *Handvatten voor werken vanuit hoge verwachtingen bij rekenen en wiskunde*. SLO. https://www.slo.nl/@24994/reken-wiskundeonderwijs-vanuit-hoge/

321 Van den Bergh, L., Van Amerongen, M., Gunsch, R., Timmermans, M, & Timmermans, A. (2021). *Leidraad onderwijs vanuit hoge verwachtingen*. Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek. www.onderwijskennis.nl/node/776

322 SLO (2022). *Handvatten voor werken vanuit hoge verwachtingen bij rekenen en wiskunde*. SLO.

Samenvatting

Betekenisvol en doelgericht reken-wiskunde-onderwijs in groep 3-8

Deze leidraad ondersteunt leerkrachten bij het vormgeven van betekenisvol en doelgericht reken-wiskundeonderwijs in groep 3-8. Onderwijs dat schakelt tussen concreet en abstract, begripsvorming én procedures, en dat motivatie en plezier in rekenen-wiskunde bevordert. Dit vraagt van leerkrachten dat ze voortdurend onderzoeken wat hun leerlingen al kennen, kunnen en begrijpen. Zo kunnen ze aansluiten bij leerbehoeftes en doelen, en zorgen voor uitdaging, ondersteuning en zelfvertrouwen.
Deze leidraad biedt handvatten om samen met collega's aan de slag te gaan. De aanbevelingen zijn gebaseerd op wetenschappelijke bronnen uit binnen- en buitenland.

In deze leidraad staan zes aanbevelingen:

1. Zorg dat leerlingen een rijk reken-wiskundig netwerk ontwikkelen.
2. Schakel tussen concreet, schematisch en abstract.
3. Sluit aan bij je leerlingen en het beoogde doel.
4. Leer alle leerlingen reken-wiskundige problemen oplossen.
5. Stimuleer motivatie, betrokkenheid en een wiskundige attitude.
6. Investeer als school in reken-wiskundeonderwijs.

Bij alle aanbevelingen geven we concrete suggesties om aan de slag te gaan, individueel of samen met collega's.

Mogen we je iets vragen?
We horen graag wat je van deze leidraad vindt en hoe je deze gaat gebruiken in jouw onderwijs.
Laat het ons weten via *onderwijskennis.nl/leidraden/vragenlijst.*

www.nko.nl
www.onderwijskennis.nl